Bir Doğrusal Programlama Modelinin Genel Yapısı

Amaç Fonksiyonu → $\sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} a_{ij} x_j \begin{bmatrix} \leq \\ = \\ \geq \end{bmatrix} B_i$

Kısıtlar → $Z = \sum_{j=1}^{N} C_j x_j$

Karar Değişkenleri → x_j

Pozitiflik Koşulu → $x_j >= 0$

Bu formülde kullanılan matematik notasyonların açıklamaları ise şöyledir:

- i = 1, 2, ... M (kısıt sayısı)
- j = 1, 2,..... N (karar değişken sayısı)
- x_j = karar değişkenleri
- C_j = amaç fonksiyonu katsayıları, j karar değişkeninin katkı katsayıları
- a_{ij} = i kısıtındaki j karar değişkeninin teknik katsayısı
- B_i = i kısıtının sağ taraf değeri (STD) yahut kaynak değeri

Kapalı matematiksel formülü verilen bir doğrusal programlama modelinin cebirsel açılımı ise şöyledir:

Max/Min =	c_1x_1	+	c_2x_2	+	....	+	c_nx_n		STD
	$a_{11}x_1$	+	$a_{12}x_2$	+	....	+	$a_{1n}x_n$	[<=,=,>=]	b_1
	$a_{21}x_1$	+	$a_{22}x_2$	+	....	+	$a_{2n}x_n$	[<=,=,>=]	b_2
	$a_{31}x_1$	+	$a_{32}x_2$	+	....	+	$a_{3n}x_n$	[<=,=,>=]	b_2
Kısıtlar	.		.				.	.	.
	.		.				.	.	.
	.		.				.	.	.
	$a_{m1}x_1$	+	$a_{m2}x_2$	+	....	+	$a_{mn}x_n$	[<=,=,>=]	b_m
	x_1	,	x_2	,	....	,	x_n	>=	0

Doğrusal Programlamada Çözüm Yöntemleri

Doğrusal programlama modelleri aşağıda sıralanan yöntemler ile çözülebilir:

1.-) Grafik Çözüm,
2.-) Cebirsel Çözüm
3.-) Simpleks Çözüm,
4.-) İleri doğrusal programlama çözüm yöntemleri (dual simpleks …vb.)

Metod 1: Grafik Yöntem

Bir doğrusal programlama probleminin grafik çözümünde aşağıdaki adımlar izlenir:

1. Değişkenlerin koordinat sisteminin yatay ve dikey eksenlerine yerleştirilmesi,
2. Kısıtlayıcı fonksiyonların grafiğinin çizilmesi,
3. Uygun çözüm bölgesinin belirlenmesi,
4. En iyi çözümün araştırılması.

Örnek :

Amaç fonksiyonu: $Z_{max} = 6x_1 + 8x_2$

Kısıtlayıcı koşullar:

$7x_1 + 3x_2 \leq 21$ (1)

$6x_1 + 7x_2 \leq 42$ (2)

$x_1 \leq 3$ (3)

$x_2 \leq 4$ (4)

$x_1, x_2 \geq 0$ (Pozitiflik koşulu)

olarak verilen doğrusal programlama probleminin en iyi çözümünü grafik çözüm yöntemiyle bulunuz.

Çözüm :

-**≤** ve **≥** şeklindeki eşitsizlikler **=** şeklinde yazılır.

- Her kısıtlayıcı koşul denkleminin doğrusu grafik üzerine çizilir.

- Çözüm bölgeleri denklemlerinde eşitsizliğin yönü dikkate alınarak belirlenir.

- Tüm kısıtları sağlayan ortak bölge (çözüm bölgesi) belirlenir ve taranır.

Çözüm :

1. x_1 değişkenini yatay, x_2 değişkenini dikey eksen üzerinde gösterelim.

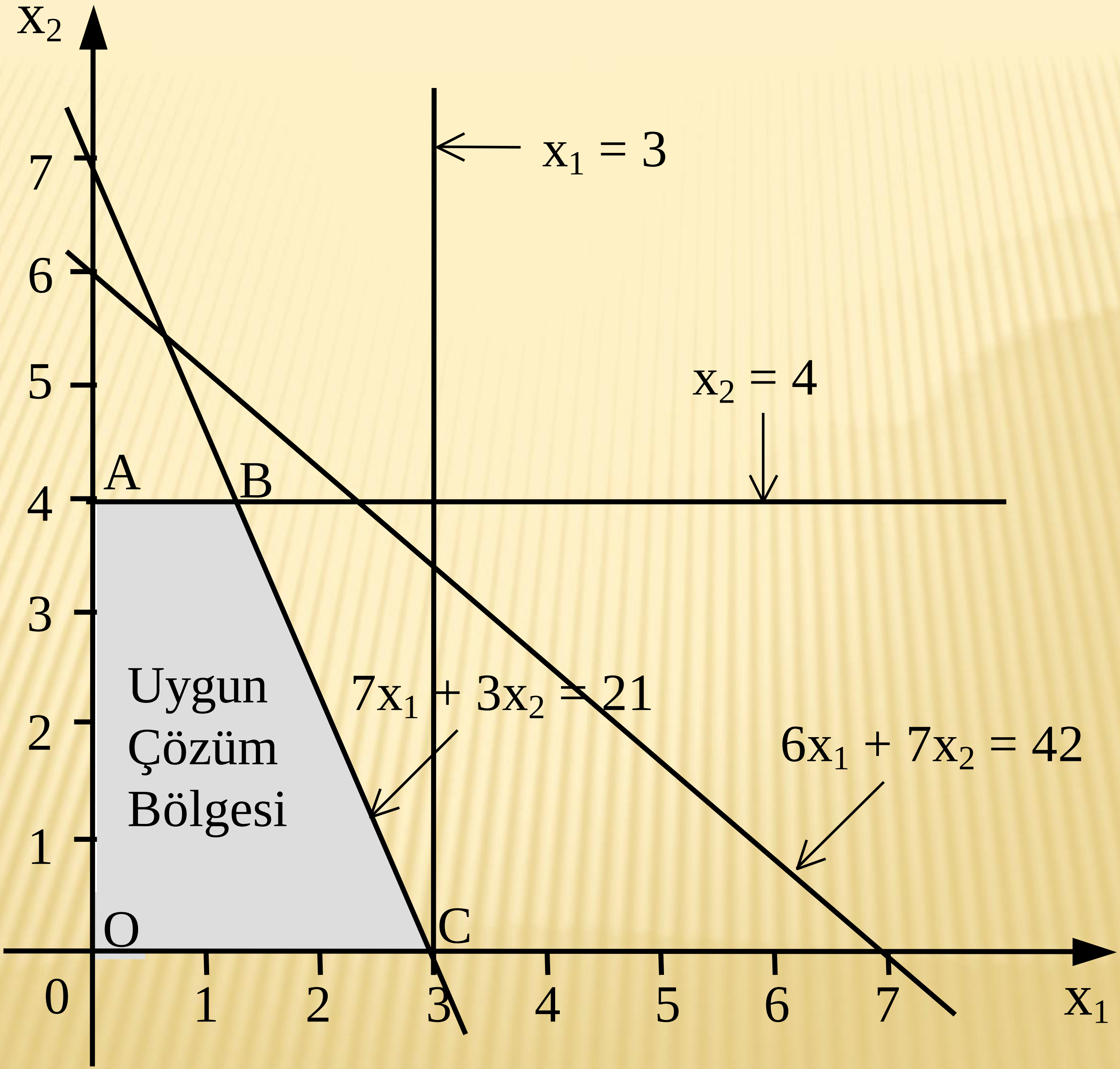
2. Koordinat belirleme ilgili tüm işlemler aşağıda verilmiştir.

•$7x_1 + 3x_2 = 21$ eşitliğinde,
$x_1 = 0$ için $x_2 = 7$
$x_2 = 0$ için $x_1 = 3$ olur.

•$6x_1 + 7x_2 = 42$ eşitliğinde,
$x_1 = 0$ için $x_2 = 6$
$x_2 = 0$ için $x_1 = 8$ olur.

(3) $x_1 = 3$ eşitliği, yatay ekseni (3, 0) noktasında kesen ve dikey eksene paralel olan bir doğru tanımlar.

(4) $x_2 = 4$ eşitliği, dikey ekseni (0, 4) noktasında kesen ve yatay eksene paralel doğru denklemidir.



x_2
$x_1 = 3$
$x_2 = 4$
A
B
C
O
0
Uygun
Çözüm
Bölgesi
$7x_1 + 3x_2 = 21$
$6x_1 + 7x_2 = 42$
x_1
1 2 3 4 5 6 7

Şekildeki taralı alanın içindeki tüm noktalar kısıtlayıcıları aynı anda sağladığından, OABC dörtgeni uygun çözüm bölgesidir. Bu alan içindeki sınırsız sayıdaki noktaların her biri uygun çözüm olarak nitelendirilir.

Şekilden görüldüğü gibi $6x_1 + 7x_2 \leq 42$ kısıtı olsa da olmasa da uygun çözüm bölgesi OABC alanı olacaktır. Çözüm bölgesini etkilemeksizin modelden çıkartılabilen bu tür kısıtlayıcılara *gereksiz* (*fazlalık*) *kısıtlayıcılar* denir. $x_1 \leq 3$ kısıtının da gereksiz olduğu görülebilir.

Şekildeki OABC dörtgeninin köşe noktalarının koordinatlarını bulalım.

Köşe Noktası	X_1	X_2	Amaç Fonksiyonu ($Z_{max} = 6x_1 + 8x_2$)
O	0	0	0
A	0	4	32
B	1,3	4	39,7
C	3	0	18

B noktasının koordinatları:

$$7x_1 + 3x_2 = 21 \longrightarrow 7x1{,}285 + 3x_2 = 21$$

$$-3/\quad x_2 = 4 \qquad\qquad 3x_2 = 12$$

$$7x_1 = 9 \qquad\qquad x_2 = 4$$

$$x_1 = 9/7\ (1{,}285)$$

Örnek :

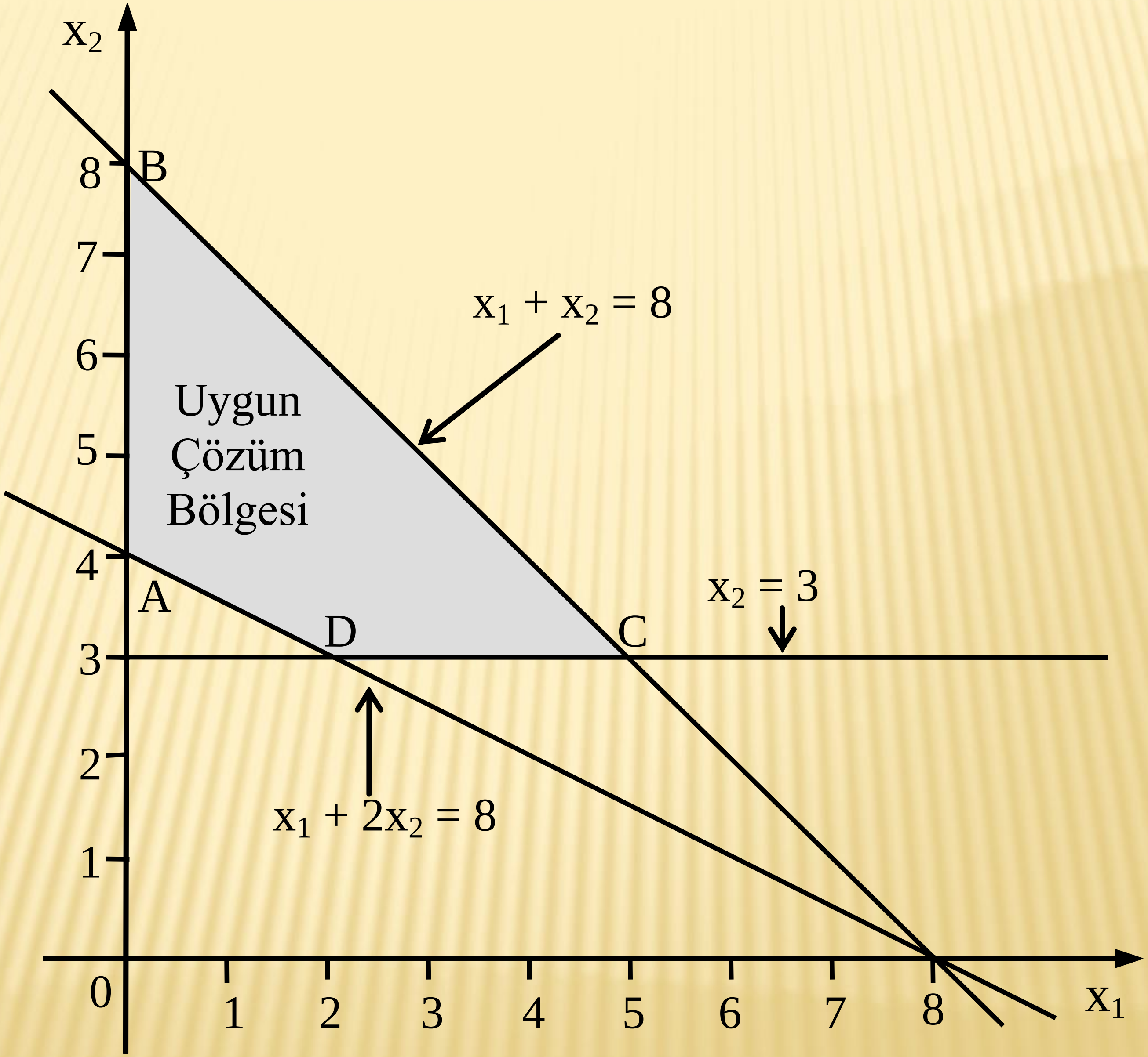
Aşağıdaki doğrusal programlama problemini grafik yöntemiyle çözünüz.

$$Z_{max} = x_1 + 3x_2$$
$$x_1 + x_2 \leq 8$$
$$x_1 + 2x_2 \geq 8$$
$$x_2 \geq 3$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Doğruların çizilmesiyle ilgili işlemler aşağıda topluca gösterilmiştir.

$x_1 + x_2 = 8$ eşitliğinde $x_1 = 0$ için $x_2 = 8$, $x_2 = 0$ için $x_1 = 8$ bulunur.

$x_1 + 2x_2 = 8$ eşitliğinde $x_1 = 0$ için $x_2 = 4$, $x_2 = 0$ için $x_1 = 8$ bulunur.



x_2
8
B
7
$x_1 + x_2 = 8$
6
Uygun
Çözüm
Bölgesi
5
4
A
$x_2 = 3$
D
C
3
2
$x_1 + 2x_2 = 8$
1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
x_1

Şekilden görüldüğü gibi, uygun çözüm bölgesi ABCD konveks kümesidir.
Bu bölgenin uç noktalarından en az bir tanesi amaç fonksiyonu değerini en büyükleyecektir

Şekildeki ABCD dörtgeninin köşe noktalarının koordinatlarını bulalım.

Köşe Noktası	X_1	X_2	Amaç Fonksiyonu ($Z_{max} = x_1 + 3x_2$)
A	0	4	12
B	0	8	24
C	5	3	14
D	2	3	11

C noktasının koordinatları:

$$\begin{array}{rl} & x_1 + x_2 = 8 \\ -1/ & \underline{\quad\quad x_2 = 3} \\ & x_1 = 5 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 5 + x_2 = 8 \\ x_2 = 3 \end{array}$$

D noktasının koordinatları:

$$\begin{array}{rl} & x_1 + 2x_2 = 8 \\ -2/ & \underline{\quad\quad x_2 = 3} \\ & x_1 = 2 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 2 + 2x_2 = 8 \\ x_2 = 3 \end{array}$$

Görüldüğü gibi, B amaç fonksiyonuna en büyük değeri sağlamaktadır. B'nin koordinatlarının $x_1 = 0$, $x_2 = 8$ olduğu göz önünde bulundurulduğunda $Z_B(Z_{max})$ aşağıdaki gibi hesaplanır.

$Z_B = Z_{max} = 0 + 3(8) = 24$

Özetle, karar değişkenlerinin en iyi değerleri $x_1 = 0$, $x_2 = 8$ ve amaç fonksiyonunun en büyük değeri 24 olarak belirlenmiştir.

Uç noktaların koordinatlarının ayrı ayrı hesaplanıp amaç fonksiyonuna yerleştirilmesiyle hesaplanan Z değerleri aşağıda verilmiştir.

Bu hesaplamalarda amaç fonksiyonunun en büyük değerine B(0, 8) noktasında ulaştığını göstermektedir.

$Z_A = Z_{(0,\ 4)} = 1(0) + 3(4) = 12$
$Z_B = Z_{(0,\ 8)} = 1(0) + 3(8) = 24$
$Z_C = Z_{(5,\ 3)} = 1(5) + 3(3) = 14$
$Z_D = Z_{(2,\ 3)} = 1(2) + 3(3) = 11$

Doğrusal Programlamada Model Çözümü :

Örnek:

Giapetto tahtadan oyuncak asker ve tren yapmaktadır. Satış fiyatları, bir oyuncak asker için $27, bir oyuncak tren için $21'dır. Bir asker için $10'lık hammadde ve $14'lık işçilik kullanılmaktadır. Bir tren için ise söz konusu rakamlar sırasıyla $9 ve $10'dır. Her bir asker için 2 saat montaj ve 1 saat marangozluk gerekirken, her bir tren için 1 saat montaj ve 1 saat marangozluk gerekmektedir. Eldeki hammadde miktarı sınırsızdır, fakat haftada en çok 100 saat montaj ve 80 saat marangozluk kullanabilen Giapetto'nun haftada en fazla 40 oyuncak asker satabileceğini göz önünde bulundurarak karını enbüyüklemek için hangi oyuncaktan haftada kaç adet üretmesi gerektiğini bulunuz.

Karar değişkenleri

x1 = bir haftada üretilen asker sayısı
x2 = bir haftada üretilen tren sayısı

Amaç fonksiyonu

$Zmax = 3x_1 + 2x_2$

Kısıtlar

$2x1 + x2 \leq 100$ *(Montaj kısıdı)*
$x1 + x2 \leq 80$ *(Marangozluk kısıdı)*
$x1 \leq 40$ *(Talep kısıdı)*
$x1, x2 \geq 0$ *(İşaret sınırlamaları)*

Grafik Çözümde Karşılaşılan Özel Durumlar

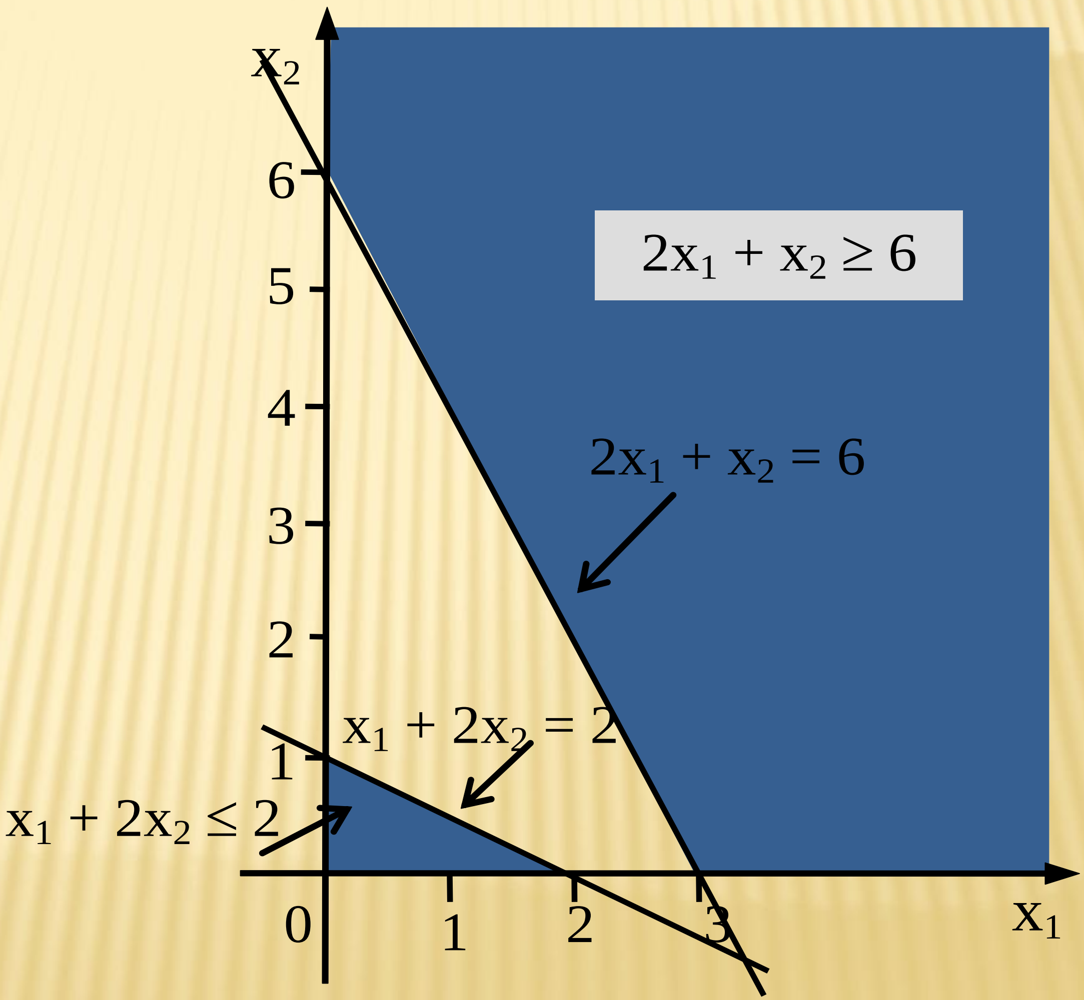
1. Eşitsizliklerin Tutarsız Olması
2. Sınırsız Çözüm
3. Uygun Çözüm Bölgesinin Bir nokta Olması
4. Alternatif Eniyi Çözümün Bulunması

1.Eşitsizliklerin Tutarsız Olması (Çözümsüz Problemler)

- Aşağıdaki doğrusal programlama problemini grafik yöntemiyle çözünüz.

$Z_{max} = 6x_1 + 3x_2$

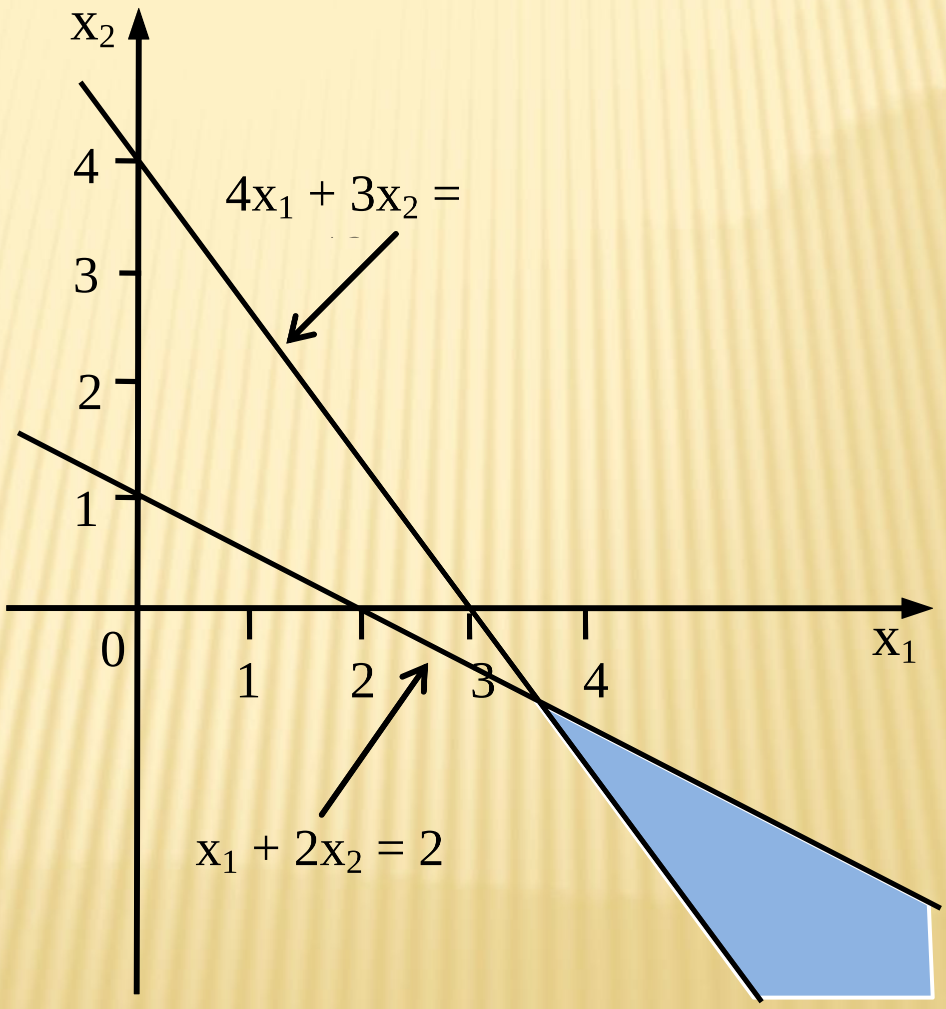
$$x_1 + 2x_2 \leq 2$$
$$2x_1 + x_2 \geq 6$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$



1.Eşitsizliklerin Tutarsız Olması

Aşağıdaki doğrusal programlama problemini grafik yöntemiyle çözünüz.

$$Z_{max} = 6x_1 + 3x_2$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 2$$
$$4x_1 + 3x_2 \geq 12$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$



2. Sınırsız Çözüm

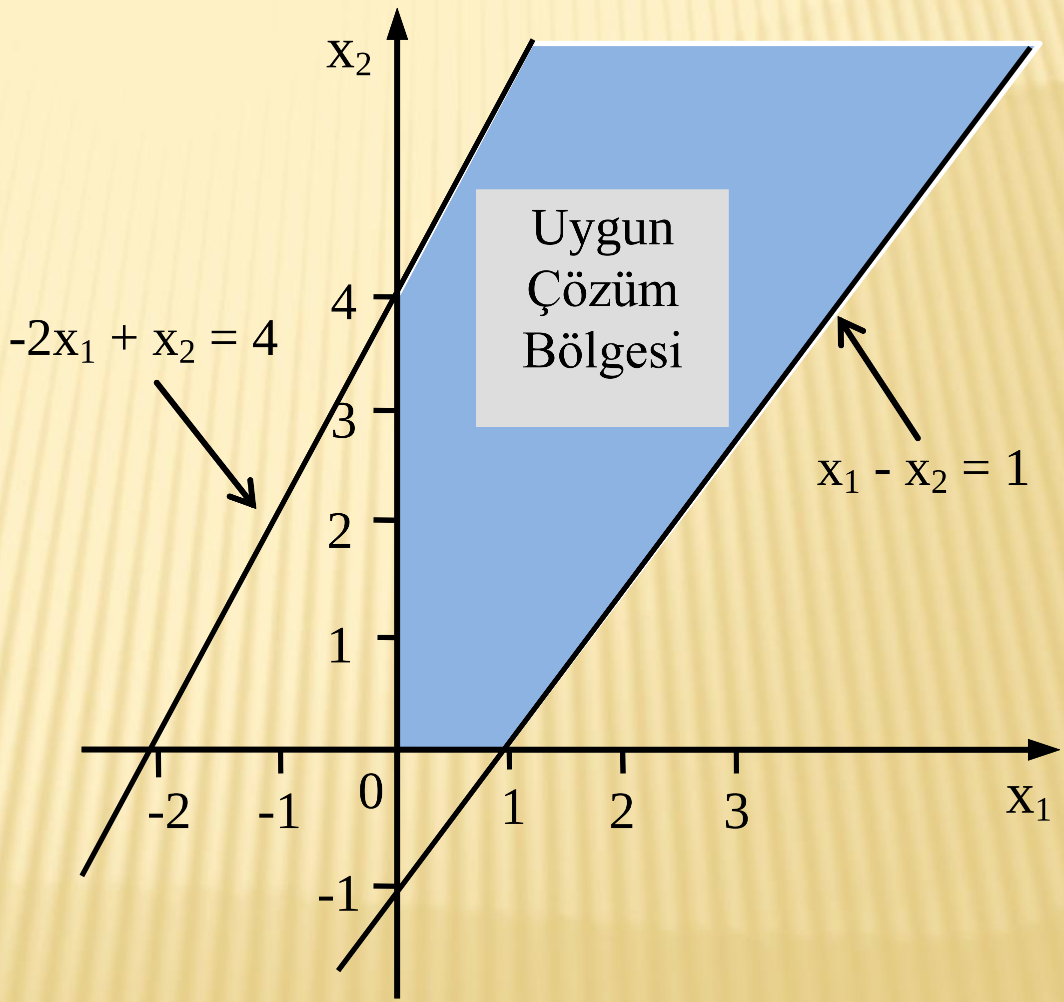
- Aşağıdaki doğrusal programlama problemini grafik yöntemiyle çözünüz.

$Z_{enb} = 2x_1 + x_2$

$-2x_1 + x_2 \leq 4$

$x_1 - x_2 \geq 1$

$x_1, x_2 \geq 0$



3. Uygun Çözümün Bir Nokta Olması (Dejenerasyon)

Aşağıdaki doğrusal programlama problemini grafik yöntemiyle çözünüz.

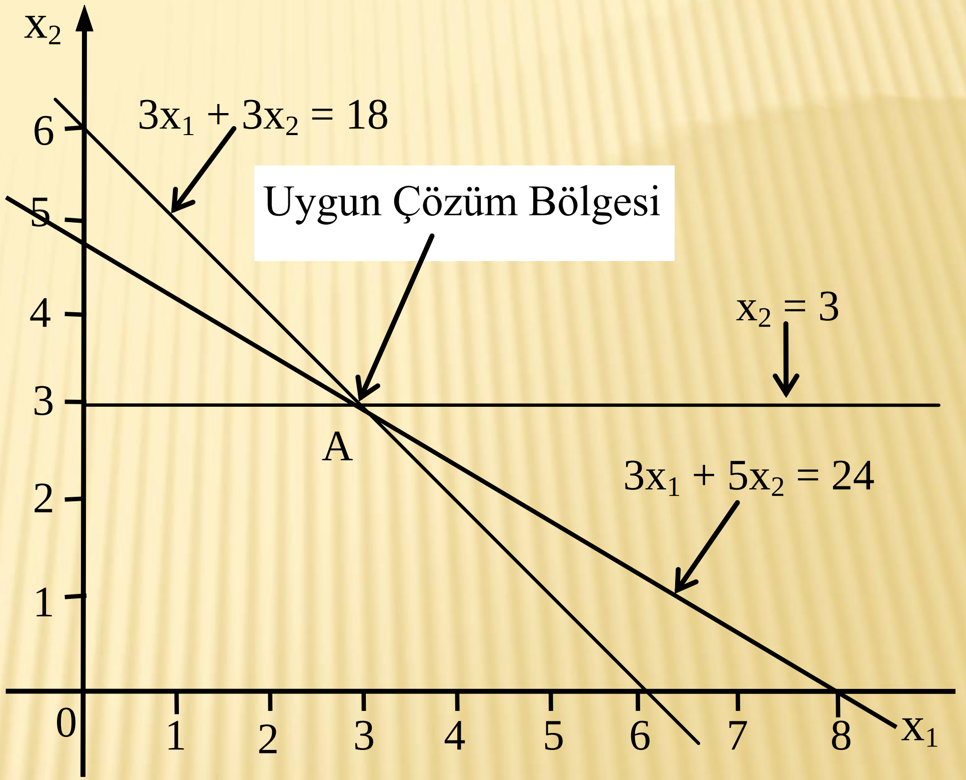
$Z_{max} = 6x_1 + 3x_2$

$x_1 + x_2 \leq 6$

$3x_1 + 5x_2 \geq 24$

$x_2 = 3$

$x_1, x_2 \geq 0$



Üç doğrunun kesiştiği noktanın koordinatlarının belirlenmesi amacıyla bunlardan rasgele seçilen ikisi, $3x_1 + 5x_2 = 24$ ve $x_2 = 3$ olsun.

Bu iki denklemin çözümünden $x_1 = 3$, $x_2 = 3$ elde edilir. Buradan amaç fonksiyonunun en büyük değeri, Z'de $x_1 = 3$, $x_2 = 3$ yerleştirilmesiyle,

$Z_{max} = 6(3) + 3(3) = 27$ olarak hesaplanır.

4. Alternatif Eniyi Çözüm Bulunması (Çoklu Optimal Çözümler)

Aşağıdaki doğrusal programlama problemini grafik yöntemiyle çözünüz.

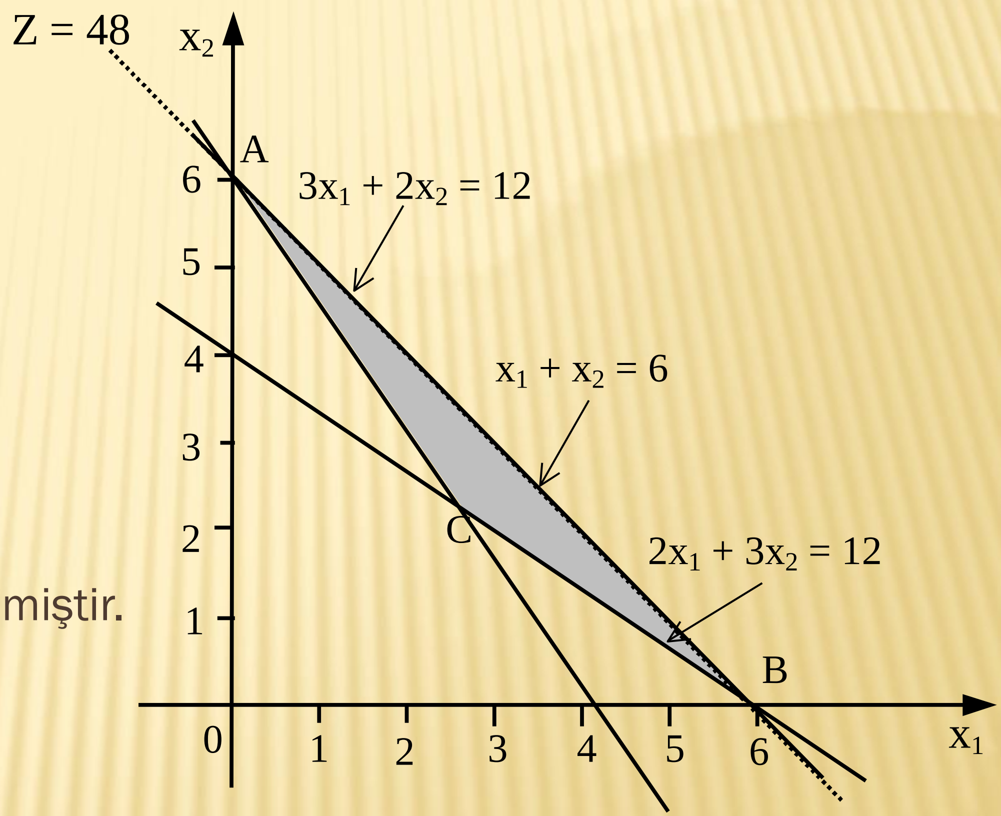
$Z_{max} = 8x_1 + 8x_2$

$2x_1 + 3x_2 \geq 12$

$3x_1 + 2x_2 \geq 12$

$x_1 + x_2 \leq 6$

$x_1, x_2 \geq 0$



Problemin uygun çözüm bölgesi

ABC üçgen alanıdır.

Amaç fonksiyonunun ABC üçgeninin

uç noktalarındaki değerleri aşağıda verilmiştir.

$Z_A = Z_{(0,\ 6)} = 8(0) + 8(6) = 48$

$Z_B = Z_{(6,\ 0)} = 8(6) + 8(0) = 48$

$Z_C = Z_{(12/5,\ 12/5)} = 8(12/5) + 8(12/5) = 192/5$

Amaç fonksiyonu en büyük değerine A(0, 6) ve B(6, 0) noktalarında ulaşmıştır. Dolayısıyla A ve B noktalarındaki çözümler birbirlerine alternatif olan en iyi çözümlerdir.

ÖDEV

Aşağıdaki DP problemini grafik çözüm yöntemi ile çözünüz.

$$Z_{max} = 3x_1 + 6x_2$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_1 - x_2 \leq -1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$Z_{max} = 2x_1 + 3x_2$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$
$$x_1 + x_2 = 3$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Zmin= 180*x* + *160y*

6*x* + *y* ≥ *12*
3*x* + *y* ≥ *8*
4*x* + *6y* = *24*
x* ≤ *5
y* ≤ *5

x,y* ≥ *0

$$\mathbf{Z_{max} = 11\, x_1 + 4\, x_2}$$
$$\mathbf{7\, x_1 + 6\, x_2 \leq 84}$$
$$\mathbf{4\, x_1 + 2\, x_2 \leq 32}$$
$$\mathbf{x_1, x_2 \geq 0}$$