



Analog Haberleşme Laboratuvarı

9.İŞARETLERİN FREKANS ANALİZİ

9.1 AMAÇ

1. Haberleşme alanında Fourier Dönüşümü (FD), işaretlerin sinüsoidal bileşenlerinin analizinin yapılması için güçlü bir matematiksel çerçeve sunmak.
2. Zaman domeninde anlaşılması karmaşık olan olguların rahatlıkla çözümlenmesi, işaretlerin bileşen analizleri ile yapılmak.
3. Fourier Dönüşümünün özelliklerini pekiştirmek, sürekli işaretlerin Fourier Dönüşümlerini alabilmek, işaretlerin frekans domeninde analizlerini yapabilmek ve yorumlayabilmek.

2 İşaretlerin Bileşen Analizi ve Uygulamaları

1800'lerde temeli atılan Fourier Dönüşümü (FD), modern çağın haberleşme sistemlerinin en önemli sac ayaklarından birisini oluşturmaktadır. FD, zamanın bir fonksiyonunu (bir sinyal veya işaret) oluşturan frekansın veya müzikal bir akorun kurucu notalarının nasıl ifade edilebileceğini sunan güçlü bir matematiksel araçtır. Fourier, **ısı yayılımı** hakkında yaptığı çalışmalar sonucunda periyodik olan işaretlerin sinüsoidallerin ağırlıklı toplamları olarak ifade edilebileceğini ortaya koymuştur. Fourier serisi olarak başlayan bu gösterim periyodik olmayan sürekli-zaman işaretlerine genişletilerek FD meydana gelmiştir. Bir işaretin sinüsoidallerin toplamı olarak yazılabilmesinin arkasında bulunan temel ise *baz* olarak seçilen sinüsoidal fonksiyon ailesinin kendi içerisinde **dikgen (orthogonal)** olmasından kaynaklanmaktadır. Bunun anlamı, eğer dikgen başka bir fonksiyon ailesi varsa işaretler bu baz üzerinden de ifade edilebilir. Bu kavramların anlaşılması için *Lineer Cebir* içinde dikgenlik konusunu ve ayrıca işaretlerin farklı bazlar ile temsil edilebilmesi hakkında *dalgacık dönüşümü* konularını araştırabilirsiniz.

FD ayrıca haberleşme alanının dışında veri sıkıştırmada da sıklıkla kullanılmaktadır. Örneğin zaman domeninde sinüsoidal bir işaret düşünülürse tüm zaman boyunca bilgi yayılmıştır. Diğer taraftan bu işaretin FD'si *genlik*, *frekans* ve *faz* bilgisinden ibarettir. Yani üç değer ile zaman domenindeki tüm sinüsoidal ifade edilmiş olur. Bir diğе uygulaması ise radyo astronomidir. Radyo teleskopları ile **doğal** olarak ölçülen görüntüler yıldızların aslında FD'sidir. Yıldızı veya herhangi bir ölçümü görüntüye dönüştürülmesi için *ölçüm* değerlerinin ters FD'sinin alınması gerekir. FD'nin aynı zamanda, makine öğrenmesi, devre analizi, görüntü işleme ve fizik gibi alanlarda da özel bir yeri vardır. Bu konu hakkındaki yetkinliğiniz diğе derslerinizin anlaşılmasında büyük katkı sağlayacaktır.



(a) Görüntü işlemede FD örnekleri (video)



(b) Radyo Astronomide FD'nin kullanımı ve dekonvolüsyon (video)



(c) Fourier'in *Isının Analitik Teorisi* Başlıklı Doktora Tezi (~ 35 MB) pdf

3 Spektrum Analizi

Spektrum Analizi (SA) makro büyüklükleri (işaret, görüntü, molekül, asal olmayan sayılar) oluşturan en temel yapı taşlarının ne olduğunu ve hangi miktarlarda bulunduğunu gösterir. SA sadece sinyalleri incelemek için kullanılan bir kavram **olmamakla** birlikte, farklı alanlarda da yaygın olarak kullanılır. Örnek olarak bir sayının asal çarpanlarına ayrıştırılması veya büyük moleküllerin atomik bileşenleri verilebilir. Önemli olan seçilen atom, asal sayı, baz fonksiyon, temel renk vb. büyüklüğün tanımladığı uzayda başka alt bileşenlere ayrıştırılmamasıdır. **Diğer yandan bir makro büyüklük sadece ve sadece tanımlanan tek uzak ile analiz edilmeyebilir.** Buna örnek olarak Fig.(1)(C) ve Fig.(1)(D) verilebilir. İki örnekte aynı renk kullanılmasına rağmen farklı temel renk uzayları ile analiz edilebilmektedir.

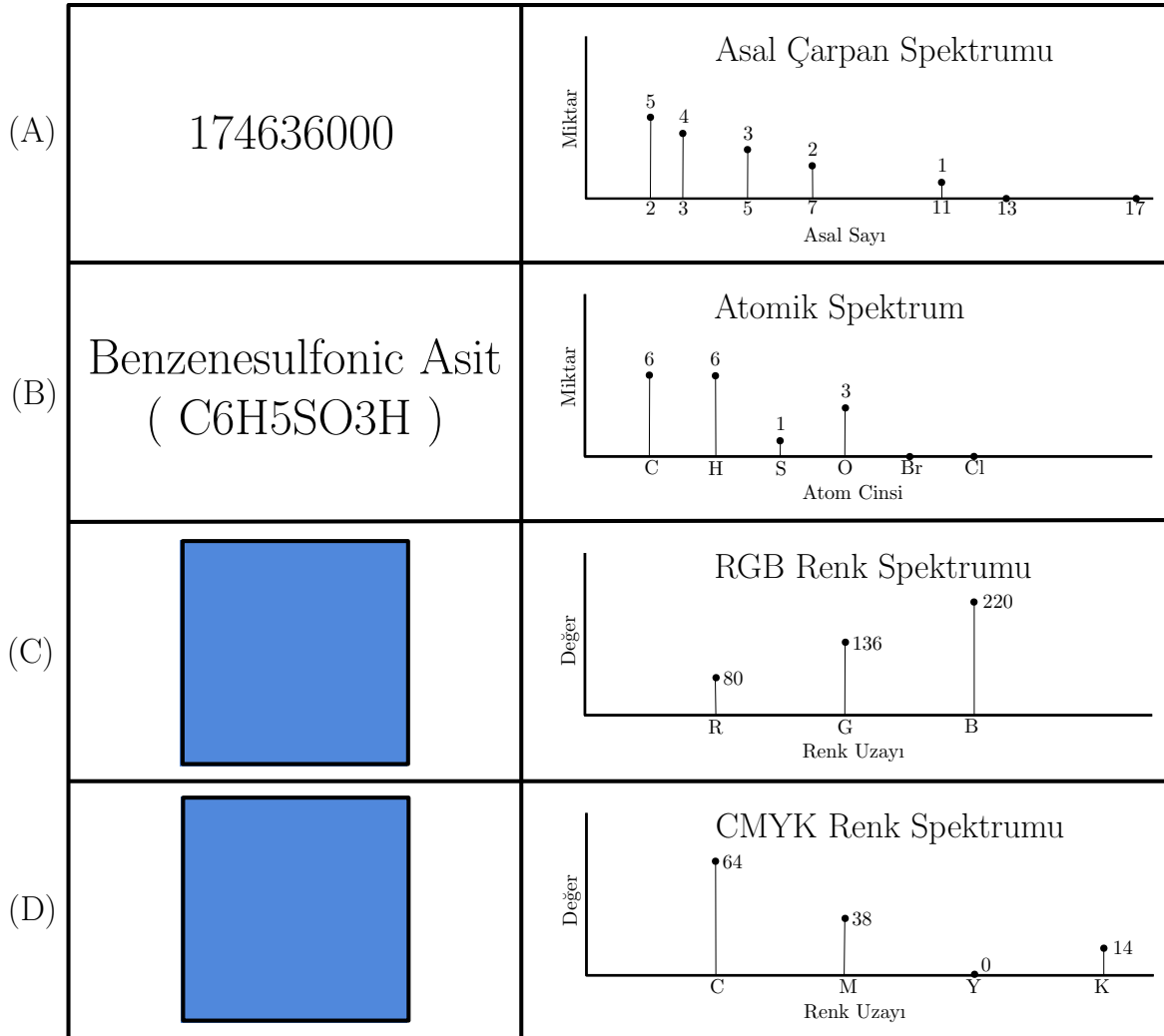


Figure 1: Farklı alanlarda kullanılan makro yapıların bileşen analizinin yapılması. Önemli olan seçilen baz (en temel bileşen) büyüklüklerinin, temsil ettikleri uzayda başka bileşenlere ayrıştırılmayan en temel yapı taşları olmasıdır.

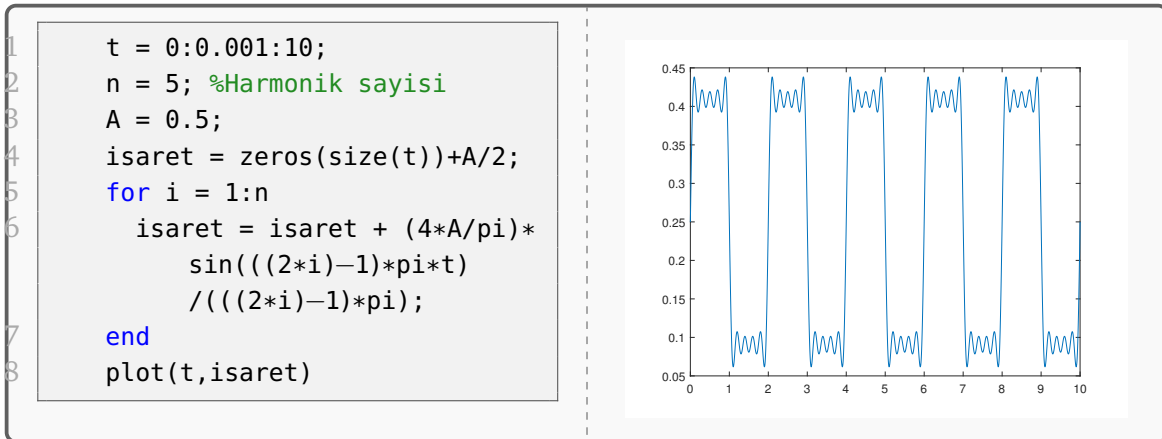
4 İşaretlerin Frekans Domeninde Analizi

Lineer ve zamanla değişmeyen sistemlerde genel yaklaşım giriş işaretlerinin, basit işaretlerin lineer kombinasyonu şeklinde ifade edilmesi ve bu şekilde analiz edilmesidir. İşaretlerin, basit sinüsoidal işaretlerin (kompleks ekponansiyellerin) kombinasyonu olarak modellenmesi, periyodik işaretler için fourier serileri ile yapılabilir.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad (1)$$
$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

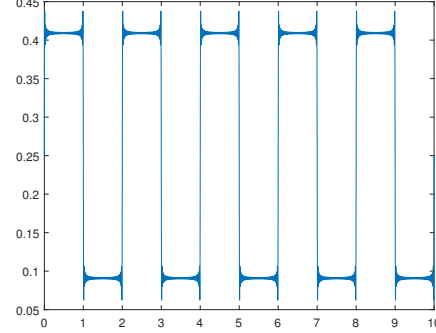
Eşitlik (1)'de sırasıyla fourier serileri sentez ve analiz denklemleri verilmiştir. Örnek olarak bir kare dalgayı oluşturabilmek için, kare dalgayı fourier serilerine açılması gerekir. Fourier serisine açıldığında, $\frac{A}{2} + \frac{4A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin((2n-1)\omega_0 t)}{2n-1}$ olarak bulunur.

MATLAB'da bu matematiksel denkleme uygun kod yazılıp kare dalga sentezlenebilir. Bu uygulama aşağıda gösterilmiştir. Fourier serilerindeki her n. eleman, n. harmonik olarak adlandırılır. Örnek olarak, frekansları aynı olan kare dalga ve üçgen dalga hoparlör aracılığıyla dinlenirse seslerinin farklı olduğu görülebilir. Bunun nedeni harmoniklerinin farklı olmasından kaynaklanır. İşareti oluşturan her bir sinüsoidal temel bileşene harmonik adı verilir.



NOT: Harmonik sayısı arttıkça, oluşturulan işaret kare dalgaya yakınsar.

```
1 t = 0:0.001:10;  
2 n = 50; % Harmonik sayısı  
3 A = 0.5;  
4 isaret = zeros(size(t))+A/2;  
5 for i = 1:n  
6     isaret = isaret + (4*A/pi)*  
7         sin(((2*i)-1)*pi*t)  
8         /(((2*i)-1)*pi);  
9 end  
10 plot(t,isaret)
```



Örnek: Aşağıda aynı frekansta kare dalga ve testere dişi dalganın sesini dinleyebilirsiniz.

```
1 Fs = 16000;  
2 Ts = 1/Fs;  
3 t = 0:Ts:1;  
4 x1 = sawtooth(2*pi*500*t);  
5 x2 = square(2*pi*500*t);  
6 c = [x1,x2]; % ilk testeredisi, ikinci kare dalga.  
7 sound(c,Fs)
```

Çalışma Sorusu:

Fourier serilerine açılmış bir işaretin formülasyonu $f(t) = \frac{A}{2} + \frac{A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\omega_0 t)}{n}$ şeklindedir. İşareti $F_s = 100$ ve $t \in [-2, 2]$ aralığında $F_0 = 2$ için $n \in \{1, 3, 5, 50\}$ harmonik ile oluşturup çizdirin.

(Sonuç: [Testere dişi dalga \(Sawtooth\)](#))

Fourier serileri, periyodik işaretlere uygulanabilir. Pratikte işaretler aperiyojik olabilir, bu nedenle Fourier dönüşüm eşitliği ortaya çıkmıştır. Ayrıca hızlı fourier dönüşümü gibi algoritmalar(FFT) sayesinde daha düşük bir işlemel karışıklık ile Fourier analizi yapılabilir. Sürekli zaman FD ve ters dönüşümü (2)'de gösterilmiştir.

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$
$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t} d\omega$$
(2)

4.1 Temel İşaretlerin Fourier Dönüşümü

Bu bölümde sinüsoidal işaretler, kare dalga ve testeredişi dalga gibi temel işaretlerin FD'si incelenecektir. Aşağıda temel işaretlerin zaman domeninde oluşturulması, adım adım FD'lerinin alınması ve MATLAB ile çizdirilmesi anlatılmıştır. Kod yazımında sürekli zaman örnekleme frekansı ve zaman vektörünün nasıl oluşturulduğu önemli bir konudur.

```
1 %% Temel isaretlerin Fourier Donusumu
2 clear all, close all; clc

4 Fs = 100; % Surekli zaman icin ornekleme frekansi
5 Ts = 1/Fs; % Surekli zaman vektoru icin Delta_T

7 t = -10:Ts:10; % [-10 , 10] arasi bir zaman dilimi
8 fonksiyon_listesi = {@cos , @sin , @square , @sawtooth}; % cell veri tipi
9 genlik_listesi = [5,10,20,30];
10 frekans_listesi = [0.5 , 1 , 2 , 5];

12 x = [];
13 for i = 1:numel(fonksiyon_listesi)
14     x(i,:) = genlik_listesi(i)*fonksiyon_listesi{i}(2*pi*frekans_listesi(i)*t)
15     ;
16 end

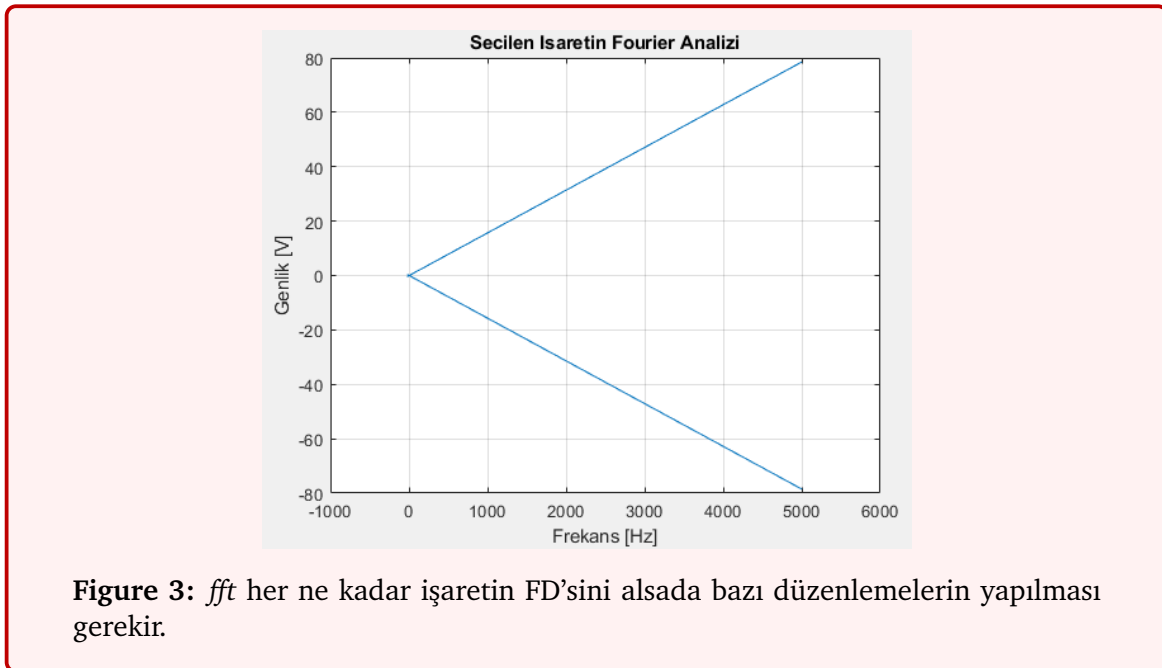
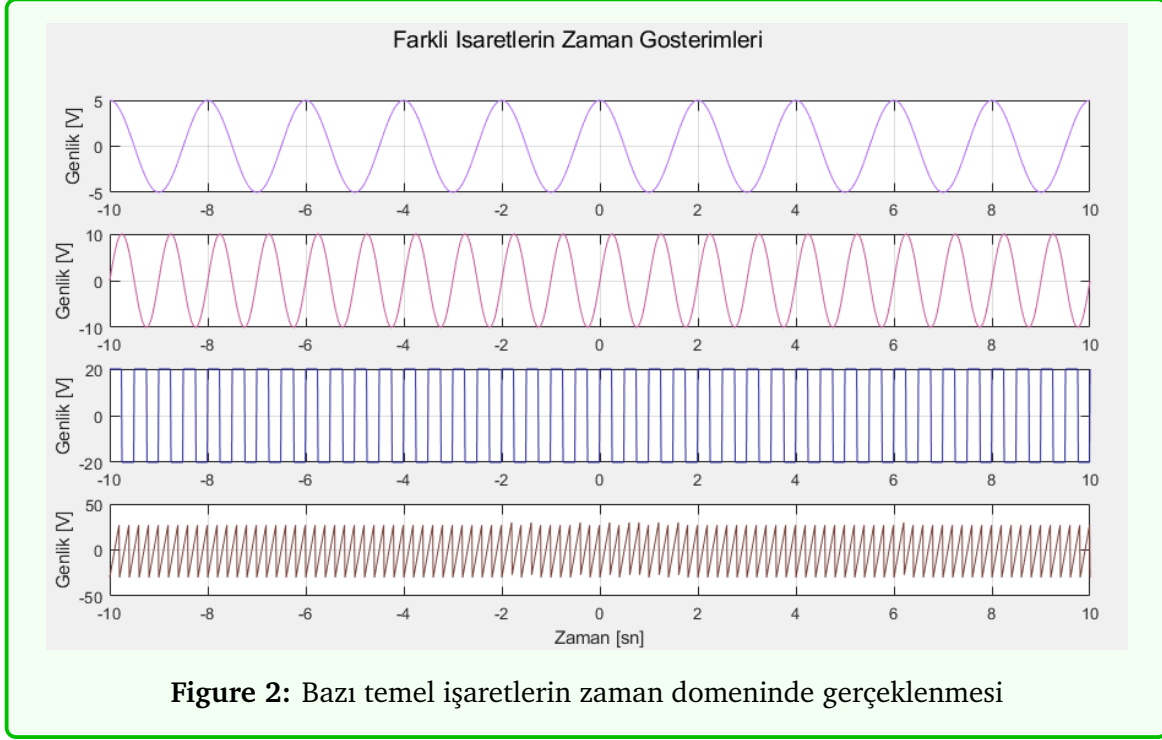
17 figure,
18 for i = 1:numel(fonksiyon_listesi)
19 subplot(numel(fonksiyon_listesi),1,i),plot(t,x(i,:), 'color',rand(1,3)),grid on
20 ylabel('Genlik [V]')
21 end
22 xlabel('Zaman [sn]') , subtitle('Farkli Isaretlerin Zaman Gosterimleri')
```

Kodlama yapılırken birden fazla fonksiyonun kullanılması için *cell* (hücre) veri yapısından faydalanılmıştır. Hücreler eleman olarak matris, vektör, fonksiyon vb. gibi çok çeşitli verileri saklayabilirler. Bu çalışmada kullanılacak olan fonksiyonlar *handle* olarak tutulmuştur. Fonksiyonlar için kullanılacak olan frekans ve genlik değerleride ayrı ayrı farklı vektörlere kaydedilmiştir. Bu sayede Şekil (2) elde edilir.

```
1 %% istenilen isaretin Fourier Donusumu
2 isaret_indis = 1;
3 tmp_x = x(isaret_indis,:);
4 X = fft(tmp_x);

6 figure,plot(X),grid on;
7 xlabel('Frekans [Hz]'),ylabel('Genlik [V]')
8 title('Secilen Isaretin Fourier Analizi')
```

isaret_indis değişkeni ile istenilen fonksiyon seçilebilmektedir. MATLAB içerisinde FD alan komut *fft*'dir. *fft* kullanılarak çok uzun vektörlerin FD'si hızlıca alınabilmektedir. Fakat sadece *fft* kullanımı Şekil (3)'den de görüleceği üzere **grafiksel olarak** kullanışsızdır. Bunun nedeni, elde edilen işaretin kompleks sayılardan oluşmasıdır.





İşaretlerin çiziminde *xlabel* ve *ylabel* kullanıldığına dikkat ediniz. Deney sınavı esnasında ilgili yerlere uygun etiketleri yazmanız puan alacağınız yerler arasındadır.

Kompleks $a + ib$ gibi bir işareti, $A\angle\theta$ olarak genlik ve faz olarak ifade edebiliriz. İşaretin genliği $abs()$ komutu ile fazı ise $angle()$ komutu ile bulunur.

```
1 %% Rafine Edilmiş Isaret Analizi – 1
2 isaret_indis = 1;
3 tmp_x       = x(isaret_indis,:);
4 X           = fft(tmp_x);
5 mag_X       = abs(X);           % Genlik Spektrumu
6 phs_X       = angle(X);        % Faz Spektrumu

8 figure,
9 subplot(211),plot(mag_X),grid on;
10 xlabel('Frekans [Hz]'),ylabel('Genlik [V]')
11 subplot(212),plot(phs_X),grid on;
12 xlabel('Frekans [Hz]'),ylabel('Faz [rad]')
13 % Not: Statik subplot kullanımı 211;
14 %      Dinamik subplot kullanımı 2,1,1.
15 suptitle('Secilen Isaretin Fourier Analizi')
```

Bu işlemler sayesinde Şekil (4)(a)'daki şekil elde edilir. Buradan görüleceği üzere FD'sini alınan \cos işareti için teorik olarak hesaplanan iki impuls görülmektedir. Ayrıca faz grafiğide elde edilmiştir. Fakat impuls işaretlerinin doğru frekanslar üzerinde olması ve genliklerinin uygun değere gelmesi için ikinci bir işlem adımı gerekmektedir.

```
1 %% Rafine Edilmiş Isaret Analizi – 2
2 isaret_indis = 1;
3 tmp_x       = x(isaret_indis,:);
4 X           = fft(tmp_x);

6 mag_X       = fftshift(abs(X)); % merkeze kaydırma
7 mag_X       = 1/numel(mag_X)*mag_X; % ölçekleme
8 phs_X       = fftshift(angle(X)); % merkeze kaydırma

10 F = linspace(-Fs/2,Fs/2,numel(mag_X));

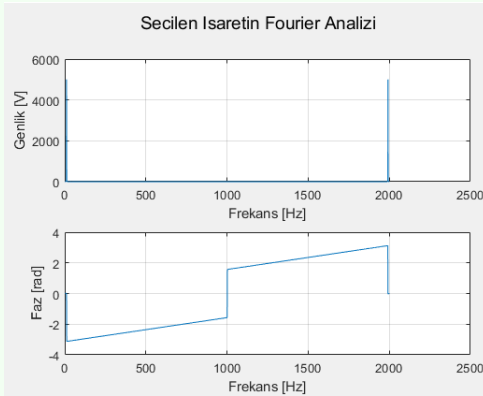
12 figure,
13 subplot(211),plot(F,mag_X),grid on;
14 xlabel('Frekans [Hz]'),ylabel('Genlik [V]')
15 subplot(212),plot(F,phs_X),grid on;
16 xlabel('Frekans [Hz]'),ylabel('Faz [rad]')
17 suptitle('Secilen Isaretin Fourier Analizi')
```


fft fonksiyonu $[0, 2 \times \pi]$ arasında çalışır. Bu aralığı $[-\pi, \pi]$ olarak simetrik hale getirmek için *fftshift* fonksiyonu kullanılmaktadır. Bu sayede grafik y -eksenine göre simetrik hale gelir. Bir başka önemli konu ise grafiğin çizdirileceği x -ekseninin belirlenmesidir. Kod içerisinde F olarak tanımlanan bu vektör, doğru ölçüm için $[-F_s/2, F_s/2]$ aralığında olması gerekir. Yapılan bu düzenleme ile işaretin içindeki frekans bilgisi doğru olarak ölçülebilir. Bir başka düzenleme ise genlik için yapılmalıdır. Genlik değerinin teori ile uyuşması için fft'de alınan nokta sayısına bölünmesi gerekir. Buda *numel* fonksiyonu ile sağlanmıştır. **Not:** *numel* fonksiyonu matris veya vektör içindeki toplam eleman sayısını verir.

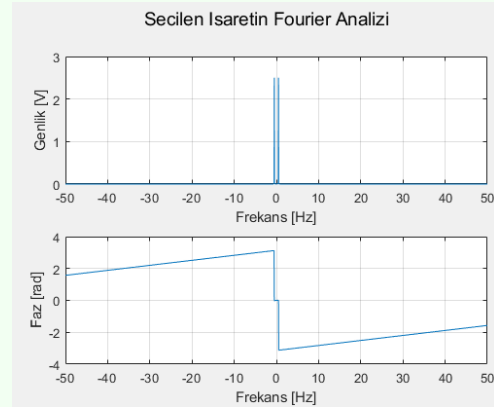
Önemli

Eksen düzenlemesinde kullanılacak olan **F mutlaka $[-F_s/2, F_s/2]$** arasında olmalıdır. Aksi takdirde frekans konumlaması yanlış olur ve doğru ölçüm yapılamaz.

Gerekli düzenlemeler yapıldığında Şekil (4)(b) grafiği elde edilir. Görüleceği üzere iki implus istenilen frekans ve genlik değerlerine gelmiştir. Bu grafik üzerinden doğru bir okuma yapılabilir. Değer okuması için *data cursor*'un kullanılması gerekir. Diğer bir önemli konu ise Şekil (4)'de görüleceği üzere $F_s/2$ değeri, kullanılan $F_s = 100$ atamasından dolayı 50'dir. Bu durumda gerçekleşen düşük frekanstaki işaretler grafikte $y = 0$ eksenine çok yakındır. Daha ayrıntılı bir analiz için *xlim* komutu kullanılabilir.



(a)



(b)

Figure 4: Sinüsoidal bir işaretin aşama aşama FD'sinin alınması: (a) *fft* ve *abs* kullanımı (b) **Eksen düzenlemesi yapılmış olan frekans domeni**



Öneri

Sizlerde *isaret_indis* değişkeni ile diğer temel işaretlerin genlik ve faz spektrumlarını inceleyebilirsiniz. Ayrıca *fft*, *abs*, *linspace* ve çizim komutlarını kullanarak başka işaretlerin (temel işaretlerin toplamı, çarpımı vb.) FD'sini yazmaya çalışınız. Ayrıca faz eksenini *derece* olarak çizdirmeyi deneyiniz.

4.2 Fourier Dönüşümünün Önemli Özellikleri

Bu bölüm kapsamında FD'nin önemli olan bazı özellikleri MATLAB yardımı ile görseller üzerinden ispatlanacaktır. FD'nin bu özellikleri sayesinde, temel işaretlerin FD'leri kullanılarak daha karmaşık fonksiyonların FD'si kolaylıkla alınabilmektedir. Bu nedenle FD'nin özelliklerinin pekiştirilmesi için örneklerin dikkatlice incelenmesi gerekir.

Örnek: 1 $\frac{dx(t)}{dt} \rightarrow j\Omega \times X(j\Omega)$

$y(t) = t \times e^{-\alpha \times t}$ işaretini $F_s = 100$ sürekli-zaman örnekleme frekansı ile $t \in [0, 10]$ sn arasında gerçekleyiniz. FD'nin ilgili özelliğini ispatlayınız.

```
1 %% FD'nin ozellikleri
2 clear all, close all; clc
3 Fs = 100; % Surekli zaman icin ornekleme frekansi
4 Ts = 1/Fs; % Surekli zaman vektoru icin Delta_T

6 t = 0:Ts:10; % [0 , 10] arasi bir zaman dilimi

8 alfa = 2;
9 x = exp(-alfa*t);
10 y = t.*x;
11 z = conv(y,[1 -1],'same')/Ts; % TUREV !!!

13 figure,
14 subplot(311),plot(t,x),grid on,
15 ylabel('Genlik','Interpreter','latex')
16 title('$x(t) = e^{-\alpha \times t}$','Interpreter','latex','FontSize',15)

18 subplot(312),plot(t,y,'r'),grid on,
19 ylabel('Genlik','Interpreter','latex')
20 title('$y(t) = t \times x(t)$','Interpreter','latex','FontSize',15)

22 subplot(313),plot(t,z,'m'),grid on,
23 xlabel('Zaman [sn]','Interpreter','latex'),
24 ylabel('Genlik','Interpreter','latex')
25 title('$z(t) = \frac{dt \times x(t)}{dt}$','Interpreter','latex','FontSize',15)

27 % Not: Teori ile kodun uyumlu olmasi icin abs almadan once
```



```
28 % carpmanın yapıldığına dikkat ediniz.
30 Y = fftshift(fft(y));
31 Z = fftshift(fft(z));
33 F = linspace(-Fs/2, Fs/2, numel(Y));
35 Zo = 1i*2*pi*F.*Y;
37 figure,
38 subplot(311),plot(F,abs(Y),'b'),grid on,
39 ylabel('Genlik','Interpreter','latex')
40 title('$Y(j\Omega)$','Interpreter','latex','FontSize',15)
42 subplot(312),plot(F,abs(Z),'r'),grid on,
43 ylabel('Genlik','Interpreter','latex')
44 title('$Z(j\Omega)$','Interpreter','latex','FontSize',15)
46 subplot(313),plot(F,abs(Zo),'m'),grid on,
47 ylabel('Genlik','Interpreter','latex')
48 title('$j\Omega \times Y(j\Omega)$','Interpreter','latex','FontSize',15)
```

Yukarıdaki kod içerisinde bulunan *conv* komutu girdi olarak verilen iki işaretin konvolüsyonunu almaktadır. 'same' ifadesi ise çıkışın ilk girdinin boyutu kadar olmasını sağlar. MATLAB esasında ayrık olarak FD hesaplar. Ayrık FD'de ise çıkış işaretinin uzunluğu $L_y = L_x + L_h - 1$ olarak bulunur. 'same' sayesinde çıkış işareti giriş işareti ile aynı uzunluğa kırpılır. $\frac{conv(x,[1-1])}{T_s}$ ifadesinin türeve karşılık gelmesinin nedeni türevin *ayrık-zaman* karşılığından gelir.

$$\frac{dx(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t) - x(t - \Delta t)}{\Delta t} \approx \frac{x[n] - x[n - 1]}{T_s} \quad (3)$$

(3)'de gösterildiği üzere türevin geri yaklaşımından ayrık zamanda karşılık geldiği ifade bulunabilir. Ayrık zaman ifadesinin birim impuls cevabı ise $h[n] = \frac{[1,-1]}{T_s}$ ifadesidir. Bu nedenle herhangi bir işareti $h[n]$ ile konvolüsyonu o işaretin türevine denk gelir.

Diğer dikkat edilmesi gereken bir konu ise teorik hesaplamalar ile MATLAB çıktısının eşleşmesi için kodda (35. satır) $Z_o = j\Omega \times Y(j\Omega)$ olarak yazılan vektörün hesaplanması için FD'si alınan Y vektörünün $j\Omega$ ile *abs* işlemi **yapılmadan önce** çarpılması gerekir. Bu sayede Şekil (12)'deki gibi grafikler uyumlu çıkmıştır.

Öneri

Kodu, α parametresinin [0.5, 5, 10] değerleri için tekrar çalıştırınız. Farklı α değerleri için frekans domenindeki değişimleri yorumlayınız. **Dikkat:** Zamanında daralma frekansta genişlemeye ve tam tersine karşılık geleceğini unutmayınız.

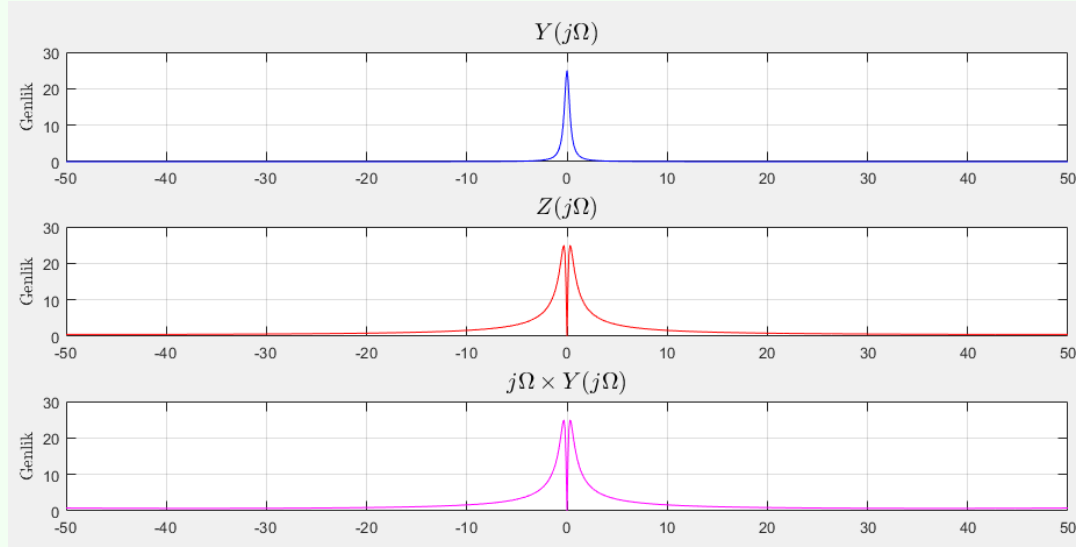


Figure 5: $\frac{dx(t)}{dt} \rightarrow j\Omega \times X(j\Omega)$ özelliğinin grafiksel ispatı

Örnek: 2 $z(t) = x_1(t) + x_2(t) \rightarrow Z(j\Omega) = X_1(j\Omega) + X_2(j\Omega)$

$x_1(t) = e^{-\frac{t^2}{2 \times \sigma^2}}$ $\sigma = 1/4$ ve $x_2(t) = \text{square}(2\pi \times 4 \times t)$ işaretleri $F_s = 100$ sürekli-zaman örnekleme frekansı ile $t \in [-1, 1]$ sn arasında gerçekleyiniz. FD'nin ilgili özelliğini ispatlayınız.

```

1 %% iki isaretin toplanmasi
2 clear all, close all; clc

4 Fs = 100; % Surekli zaman icin ornekleme frekansi
5 Ts = 1/Fs; % Surekli zaman vektoru icin Delta_T

7 t = -1:Ts:1; % [-1 , 1] arasi bir zaman dilimi

9 % Not: Gauss isaretinin x = 1 degerinde 0 olabilmesi icin sgm = 1/4
10 % secilmistir.

12 sgm = 1/4;
13 F0 = 4;
    
```

```

15 x(1,:) = exp(-t.^2/(2*sgm^2));
16 x(2,:) = square(2*pi*F0*t);
17 z      = sum(x,1); % sum komutunun matrislerdeki kullanimini arastiriniz.**

19 figure,
20 subplot(211),plot(t,x'),grid on,
21 xlabel('Zaman [sn]'),ylabel('Genlik [V]')
22 title('Gauss ve Kare Dalga Isaretleri')

24 subplot(212),plot(t , z , 'm'),grid on,
25 xlabel('Zaman [sn]'),ylabel('Genlik [V]')
26 title('Iki Isaretin Toplami')

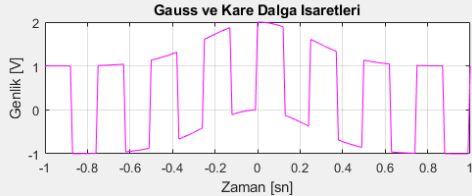
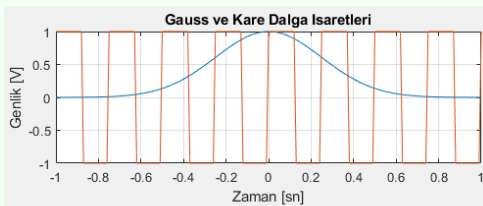
28 X = fftshift(fft(x')); % toplamadan once abs kullanilmadi. !!!
29 Z1 = fftshift(abs(fft(z)));
30 Z0 = sum(X,2); Z0 = abs(Z0);

32 F = linspace(-Fs/2,Fs/2,numel(Z0));
33 mean_abs_error = mean(abs(Z0 - Z1));

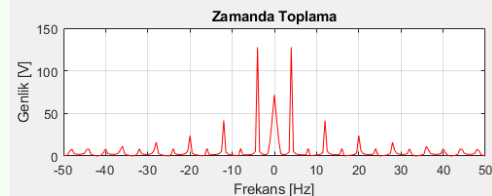
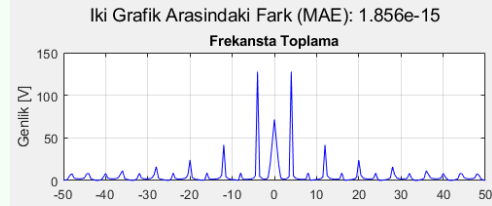
35 figure
36 subplot(211),plot(F,Z0,'b'),grid on,ylabel('Genlik [V]')
37 title('Frekansta Toplama')
38 subplot(212),plot(F,Z1,'r'),grid on
39 xlabel('Frekans [Hz]'),ylabel('Genlik [V]')
40 title('Zamanda Toplama')

42 subtitle(['Iki Grafik Arasindaki Fark (MAE): ',num2str(mean_abs_error)])

```



(a)



(b)

Figure 6: $z(t) = x_1(t) + x_2(t) \rightarrow Z(j\Omega) = X_1(j\Omega) + X_2(j\Omega)$



Öneri

Mean Absolute Error hatanın sayısallaştırılması için önemli bir metriktir. Bu sayede iki işaret arasındaki farklılığın ne kadar olduğunun ölçütü *MAE* ile verilebilir. Matematiksel gösterimi: $E = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |x_1[n] - x_2[n]|$. *MAE* fonksiyonunu handle olarak yazabilirsiniz.

Örnek: 3 $z(t) = x_1(t) \times x_2(t) \longrightarrow Z(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} \times X_1(j\Omega) \otimes X_2(j\Omega)$

$x_1(t) = e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$ $\sigma = 1/4$ ve $x_2(t) = \text{square}(2\pi \times 4 \times t)$ işaretlerini $F_s = 100$ sürekli-zaman örnekleme frekansı ile $t \in [-1, 1]$ sn arasında gerçekleyiniz. FD'nin ilgili özelliğini ispatlayınız. (Yukarıdaki kodun devamı olarak aşağıdaki kod verilmiştir.)

```
2 z = prod(x,1);

4 figure,
5 subplot(211),plot(t,x'),grid on,
6 xlabel('Zaman [sn]'),ylabel('Genlik [V]')
7 title('Gauss ve Kare Dalga Isaretleri')

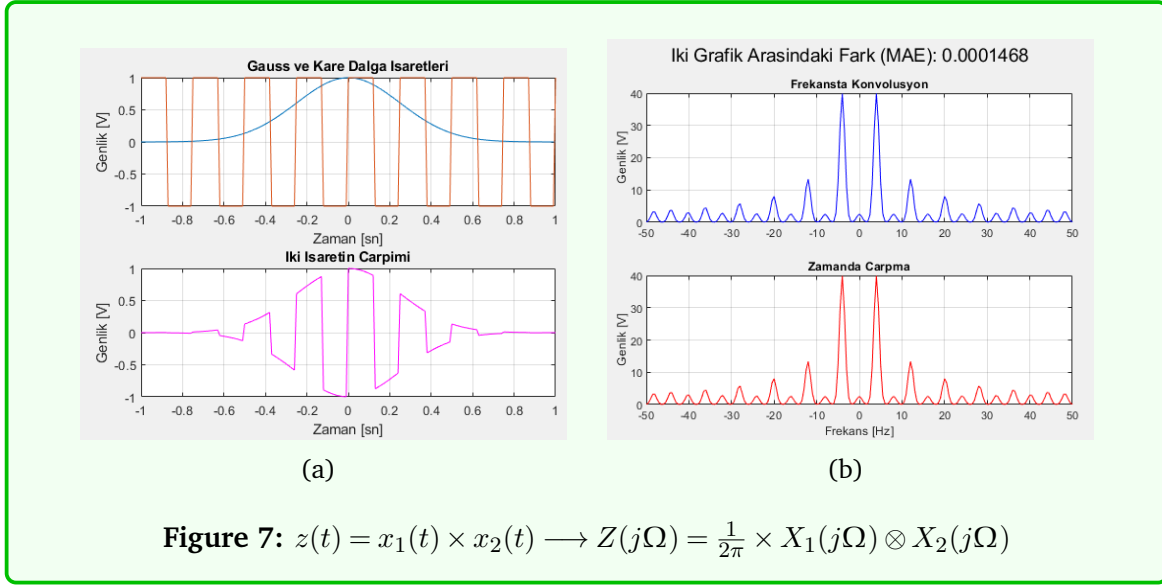
9 subplot(212),plot(t , z , 'm'),grid on,
10 xlabel('Zaman [sn]'),ylabel('Genlik [V]')
11 title('iki Isaretin Carpimi')

14 X = fftshift(fft(x'));
15 Z1 = fftshift(abs(fft(z)));
16 Z0 = 1/(numel(X(:,1)))*conv(X(:,1),X(:,2),'same'); Z0 = abs(Z0);
17 %Not: 1/(numel(X(:,1))) teorik formüldeki 1/(2pi) degerine denk gelir.

19 F = linspace(-Fs/2,Fs/2,numel(Z0));
20 mean_abs_error = mean(abs(Z0 - Z1));

22 figure
23 subplot(211),plot(F,Z0,'b'),grid on,ylabel('Genlik [V]')
24 title('Frekansta Konvolusyon')
25 subplot(212),plot(F,Z1,'r'),grid on
26 xlabel('Frekans [Hz]'),ylabel('Genlik [V]')
27 title('Zamanda Carpma')

29 suptitle(['iki Grafik Arasindaki Fark (MAE): ',num2str(mean_abs_error)])
```



Örnek: 4 $x(t) \times e^{-j\Omega_0 t} \rightarrow X(j(\Omega - \Omega_0))$

$x(t) = e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$ $\sigma = 1/8$ ve $F_0 = 20Hz$ için $F_s = 100$ sürekli-zaman örnekleme frekansı ile $t \in [-1, 1]$ sn arasında gerçekleyiniz. FD'nin ilgili özelliğini ispatlayınız.

```

1 clear all, close all; clc
2 Fs = 100; % Surekli zaman icin ornekleme frekansi
3 Ts = 1/Fs; % Surekli zaman vektörü için Delta_T

5 t = -1:Ts:1; % [-1 , 1] arası bir zaman dilimi
6 sgm = 1/8;
7 F0 = 20;
8 x = exp(-t.^2/(2*sgm^2));

10 z1 = x.*exp(-1i*2*pi*F0*t);
11 z2 = x.*exp(+1i*2*pi*F0*t);

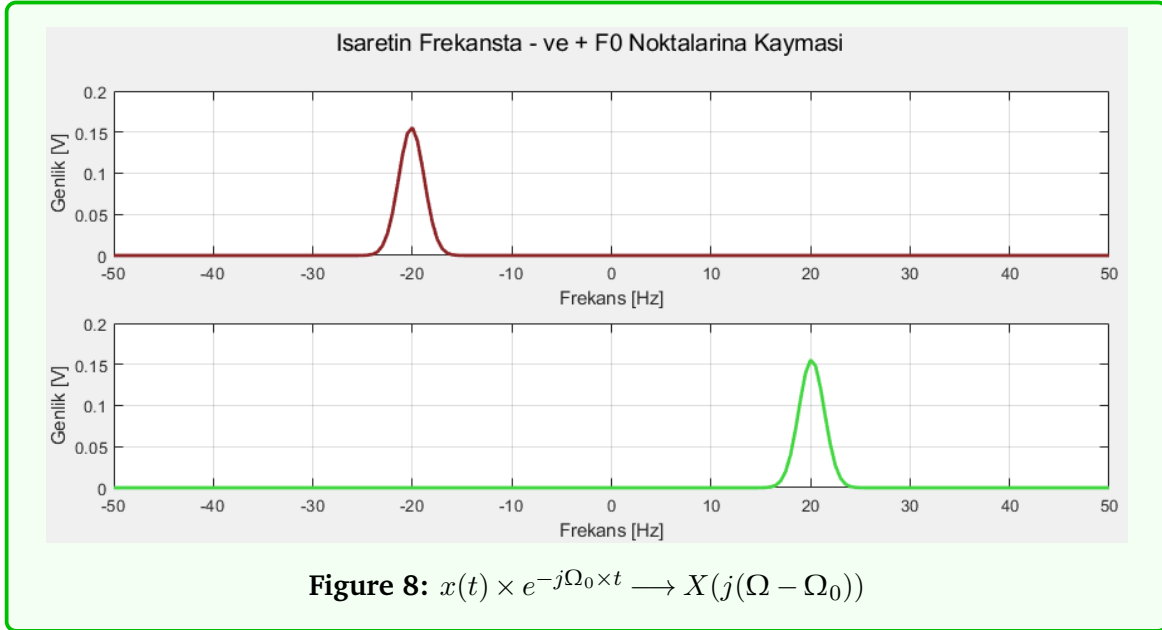
13 Z1 = fftshift(abs(fft(z1)))/numel(z1);
14 Z2 = fftshift(abs(fft(z2)))/numel(z1);

16 F = linspace(-Fs/2,Fs/2,numel(Z1));

18 figure,
19 subplot(211),plot(F,Z1,'color',rand(1,3),'linewidth',2),grid on
20 xlabel('Frekans [Hz]'),ylabel('Genlik [V]')
21 subplot(212),plot(F,Z2,'color',rand(1,3),'linewidth',2),grid on
22 xlabel('Frekans [Hz]'),ylabel('Genlik [V]')

```

24 `subplot('Isaretin Frekansta - ve + F0 Noktalarina Kaymasi')`



4.3 Gürültülü İşaretlerin Frekans Analizi

Örnek: 1 Mesaj İşaretinin Gönderimi

Haberleşmenin temel problemlerinden birisi gürültüdür. Gürültünün işaretlerin **genlikleri** üzerinde bozucu etkileri vardır. Bu olgunun incelenmesi için mesaj olarak $x(t) = A \times e^{-\frac{t^2}{2 \times \sigma^2}} + B \times \sin(2\pi \times F_0 \times t)$ işaretini $\sigma = 0.5$, $A = 50$; $F_0 = 4$, $B = 1$; $F_s = 1e3$, $t \in [-20, 20]$ parametreleri ile üretiniz. 0dB gürültü ekleyerek FD'sini inceleyiniz.

```
1 %% Gurultulu Isaretlerin FD'si
2 clear all, close all; clc
3 Fs = 1000; % Surekli zaman icin ornekleme frekansi
4 Ts = 1/Fs; % Surekli zaman vektoru icin Delta_T

6 t = -20:Ts:20; % [-20 , 20] arasi zaman dilimi

8 sgm = 0.5;      A = 50;
9 F0 = 4;        B = 1;
10 x = A*exp(-t.^2/(2*sgm^2)) + B*sin(2*pi*F0*t);

12 % Not: Gauss isareti, 4*sgm'da sifira ulasir !!
13 % Bu sayede grafik uzerinden sgm degerini belirleyebilirsiniz !!
```



```

15 y = awgn(x,0,'measured');

17 figure,
18 subplot(2,1,1),plot(t,x),grid on,xlabel('Zaman [sn]'),ylabel('Genlik [V]')
19 title('$x(t) = A \times e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} + B \times \sin(2\pi \times F_0 \times t)$',...
20     'Interpreter','latex','FontSize',15)

22 subplot(2,1,2),plot(t,y),grid on,xlabel('Zaman [sn]'),ylabel('Genlik [V]')
23 title('$y(t) = x(t) + \eta(t)$','Interpreter','latex','FontSize',15)

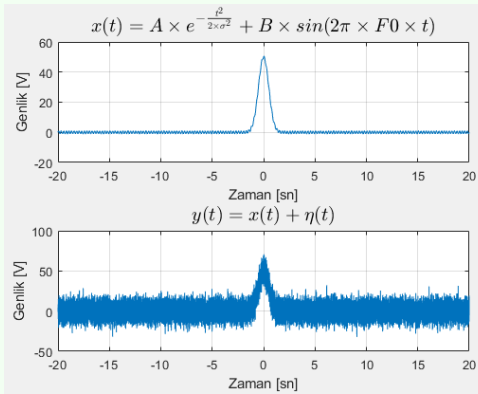
25 mag_X = fftshift(abs(fft(x))); mag_X = 1/numel(mag_X)*mag_X;
26 mag_Y = fftshift(abs(fft(y))); mag_Y = 1/numel(mag_Y)*mag_Y;

28 F = linspace(-Fs/2, Fs/2,numel(mag_X));

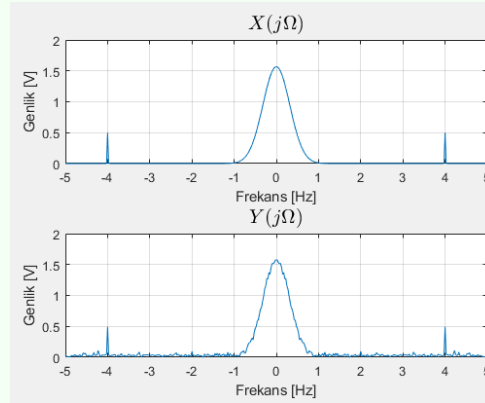
30 figure,
31 subplot(2,1,1),plot(F,mag_X),grid on,
32 xlabel('Frekans [Hz]'),ylabel('Genlik [V]'),xlim([-5 5])
33 title('$X(j\Omega)$','Interpreter','latex','FontSize',15)

35 subplot(2,1,2),plot(F,mag_Y),grid on,
36 xlabel('Frekans [Hz]'),ylabel('Genlik [V]'),xlim([-5 5])
37 title('$Y(j\Omega)$','Interpreter','latex','FontSize',15)

```



(a)



(b)

Figure 9: Zaman domaininde gürültü oldukça baskındır. Bu nedenle mesaj işaretindeki sinüsoidal bileşen gözlemlenememektedir. Fakat FD analizi ile $4Hz$ üzerinde bir bilginin olduğu net bir şekilde ölçülebilir.



Öneri

$\sigma \in [0,5]$ aralığında değiştirerek etkileri gözlemleyiniz. Zamanda genişleme frekansta daralma veya tam tersi etkiye dikkat ediniz. Ayrıca farklı dB değerleri için analizleri tekrar yapabilirsiniz.

5 Fourier Dönüşümü ve Filtreleme

FD'nin temel kullanım amaçlarından bir tanesi mesaj işaretlerini uygun filtreler yardımı ile geri üretebilmektir. Zaman domeninde üst üste toplanan işaretler, eğer frekans domeninde farklı merkez frekanslarının üstünde ve belli bir band genişliğine sahip iseler kolaylıkla birbirlerinden ayrıştırılabilirler. Buna *FM* radyolar örnek olarak verilebilir. Antene elektromanyetik dalgalar ile gelen işaretlerin içinde tüm yayınların toplamı vardır. Radyonun frekans ayarlama birimi ile $F_c \in [87.50, 108.00] MHz$ aralığında seçilen merkez frekansı etrafında band geçiren filtreleme yapılır. Bu sayede diğer yayınlar iptal edilir ve seçilen yayın akışı radyomuza sağlanır. Bu örneğe benzer bir simülasyon, 5. Deney kapsamında gerçekleştirilecektir.

Örnek: 1 Filtre Band Genişliğinin Etkileri

$x(t) = A \times e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} + B \times \sin(2\pi \times F_0 t)$, $\sigma = 0.5$ ve $F_0 = 4$ işareti *Gauss* ve *sin* fonksiyonlarından oluşturulmuş iki farklı mesaj işaretini içermektedir. Mesaj işaretini antem vasıtası ile yayınlarken dış ortamdan kaynaklanan $5dB$ değerinde bir gürültü etki etsin. Birim impuls cevabı $h(t) = e^{-\frac{-t^2}{2\sigma^2}} \times \cos(2\pi \times F_x \times t)$ ile işaret üzerinde $F_x = 0$ olacak şekilde $\sigma \in \{5, 1, 1e-1, 1e-2, 5e-3, 1e-3, 1e-4\}$ değerleri için filtrelemeler yapınız. $F_s = 1e3$ ve $t \in [-20, 20]$ olarak alınız. σ değeri azaldıkça zaman domenindeki *Gauss* filtresinin genişliği azalacak ve frekans domeninde filtrenin band genişliği ise artacaktır. $F_x = 0$ olduğundan dolayı filtrenin merkez frekansı 0 olarak bulunacaktır.

```
1 %%
2 clear all, close all; clc
3 Fs = 1000; % Surekli zaman icin ornekleme frekansi
4 Ts = 1/Fs; % Surekli zaman vektoru icin Delta_T

6 t = -20:Ts:20; % [-20 , 20] arasi bir zaman dilimi

8 sgm = 0.5;          A = 50;
9 F0 = 4;             B = 1;
10 x = A*exp(-t.^2/(2*sgm^2)) + B*sin(2*pi*F0*t);
11 % Not: Gauss isaretinde isaret 4*sgm'da sifira ulasir !!
12 % Bu sayede grafik uzerinden sgm degerini belirleyebilirsiniz !!
```



```
14 y = awgn(x,5,'measured');
15 %%
16 sgm3 = [5 1 1e-1 1e-2 5e-3 1e-3 1e-4];
17 fg = [5 5 5 20 50 100 500];
18 Fx = 0;
19 fig = figure('Units', 'Normalized', 'OuterPosition', [0, 0.04, 1, 0.96]),
20 for i = 1:numel(fg)
21     sgm2 = sgm3(i);
22     t1 = -4*sgm2 : Ts : 4*sgm2;

24     h = exp(-t1.^2/(2*sgm2^2)).*cos(2*pi*Fx*t1);

26     mag_Y = fftshift(abs(fft(y))); mag_Y = mag_Y/max(mag_Y);
27     mag_H = fftshift(abs(fft(h,numel(y)))); mag_H = mag_H/max(mag_H);

29     F = linspace(-Fs/2,Fs/2,numel(mag_Y));

31     z = conv(y,h,'same');
32     mag_Z = mag_H.*mag_Y;

34     clf(fig)
35     subplot(4,2,[1 2]),plot(F,mag_Y,'b'),hold on,plot(F,mag_H,'r'),
36     xlim([-fg(i) fg(i)]),ylim([0 1.1]),grid on,ylabel('Genlik [V]')
37     title(['{H(j\Omega): \color[rgb]{1.0 0.0 0.0}KIRMIZI} ',...
38     '{Y(j\Omega): \color[rgb]{0.0 0.0 1.0}MAVI}'],...
39     'Interpreter','tex','FontSize',15)

41     subplot(4,2,[3 4]),plot(F,mag_Z),xlim([-fg(i) fg(i)]),grid on
42     xlabel('Frekans [Hz]'),ylabel('Genlik [V]')
43     title('$Z(j\Omega) = H(j\Omega) \times Y(j\Omega)$',...
44     'Interpreter','latex','FontSize',15)

46     subplot(4,2,5),plot(t1,h),grid on,
47     ylabel('Genlik [V]'),xlabel('!! Zaman [sn] !! ','FontWeight', 'bold')
48     title(['$h(t) = e^{-\frac{t^2}{2\times \sigma^2}}$ ===== ',...
49     '$\sigma: $',num2str(sgm2)],'Interpreter','latex','FontSize',15)

51     subplot(4,2,6),plot(t,y), ylabel('Genlik [V]'),xlabel('Zaman [sn]')
52     title('$y(t) = x(t)+\eta(t)$ ','Interpreter','latex','FontSize',15)

54     subplot(4,2,[7 8]),plot(t , z ),grid on
55     xlabel('Zaman [sn]'),ylabel('Genlik [V]')
56     title('$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty}y(\tau)\times h(t-\tau)$',...
57     'Interpreter','latex','FontSize',15)
58     drawnow
59     pause(3)
60 end
```

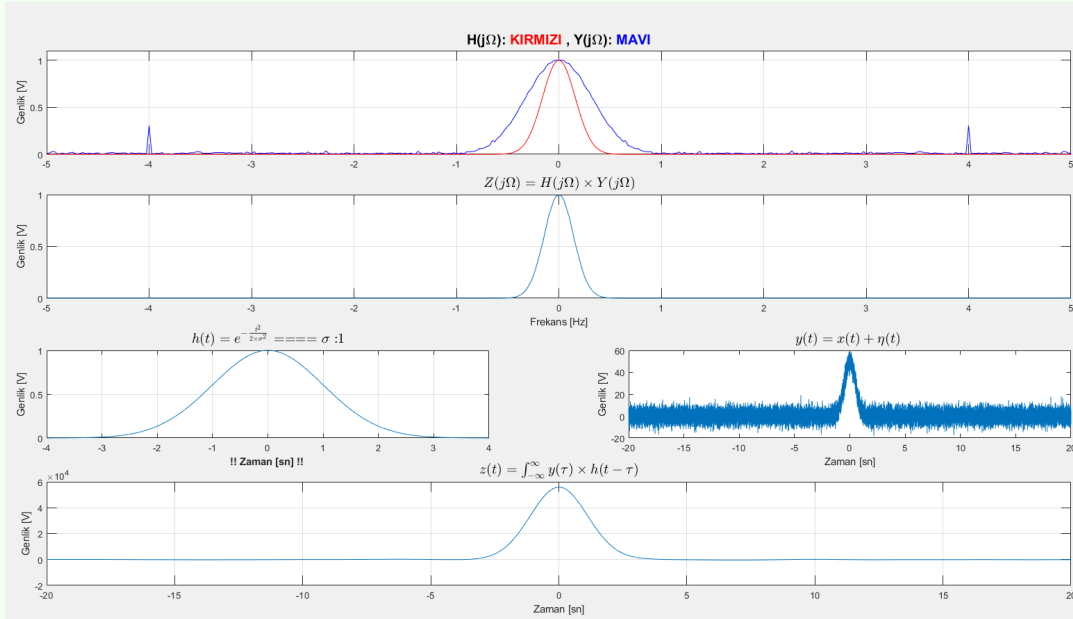


Figure 10: Filtreleme örneği: Gauss filtresinin σ değerine göre frekans bölgesinde filtreleme band genişliği değişimi ve $z(t)$ çıkış grafikleri.

conv fonksiyonunun kullanımını **mutlaka** araştırınız. Kullanım çeşitlerini öğreniniz.

Örnek: 2 Filtre Merkez Frekansının Etkileri

Uydudan yayılan bir mesaj işareti $x(t) = A \times e^{-\frac{t^2}{2 \times \sigma^2}} + B \times \sin(2\pi \times F_0 \times t) + C \times \cos(2\pi \times F_1 \times t) + D \times \cos(2\pi \times F_2 \times t + \pi/25)$ 4 farklı kullanıcı için 4 farklı bileşenden oluşmaktadır. Atmosferik etkiler ve devre gürültüleri nedeni ile 0dB gürültü ile alıcı tarafına ulaşan işaretin içinden mesaj işaretlerini doğru elde edebilmek için uygun filtreler ile filtreleyiniz.

```

1 %%
2 clear all, close all; clc
3 Fs = 1000; % Surekli zaman icin ornekleme frekansi
4 Ts = 1/Fs; % Surekli zaman vektoru icin Delta_T

6 t = -20:Ts:20; % [-20 , 20] arasi bir zaman dilimi

8 sgm = 0.5;      A = 50;
9 F0 = 5;         F1 = 10;      F2 = 20;
10 B = 1;         C = 5;        D = 7;
11 x = A*exp(-t.^2/(2*sgm^2)) + ...
12     B*sin(2*pi*F0*t) + ...

```

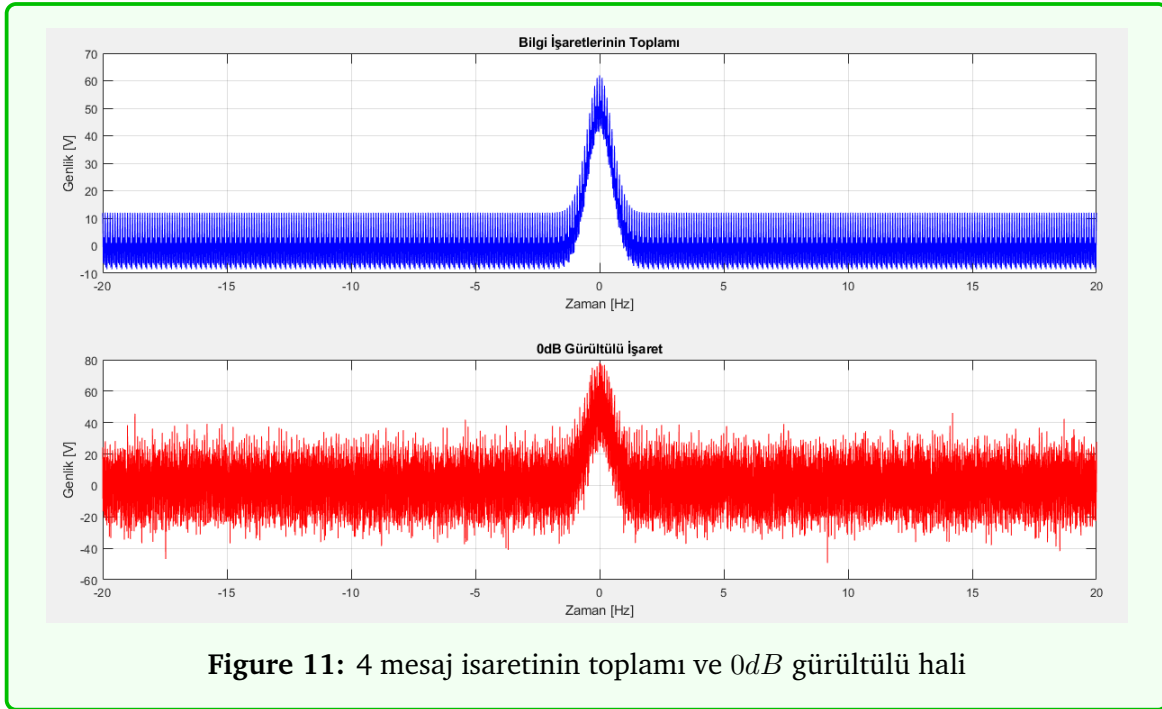
```

13 C*cos(2*pi*F1*t)      + ...
14 D*cos(2*pi*F2*t+pi/25);

16 % Not: Gauss isaretinde isaret 4*sgm'da sifira ulasir !!
17 % Bu sayede grafik uzerinden sgm degerini belirleyebilirsiniz !!
18 dB = 0;
19 y = awgn(x,dB,'measured');

21 figure('Units', 'Normalized', 'OuterPosition', [0.1, 0.2, 0.75, 0.75]),
22 subplot(211),plot(t,x,'b'),xlabel('Zaman [Hz]'),ylabel('Genlik [V]')
23 title('Bilgi Isaretlerinin Toplami'),grid on
24 subplot(212),plot(t,y,'r'),xlabel('Zaman [Hz]'),ylabel('Genlik [V]')
25 title([num2str(dB),'dB Gurultulu Isaret']),grid on

```



```

1 %% Gauss isaretinden band geciren filtre
2 %Not: Gauss isareti 4*sgm sonrası sifir kabul edilebileceginden dolayi onu,
3 %olusturmak icin kullanılacak olan zaman vektorunun sinirlari otomatik,
4 %olarak ayarlanmaktadir. Diger turllu sabit olarak [-20 20] secmek conv'da
5 %gereksiz islem yukune sebep olur. Bu calismayi farkli sgm degerleri icin
6 %tekrarlayabilirsiniz.
7 sgm3      = 2;
8 t1        = -4*sgm3: Ts : 4*sgm3;

10 Fx        = [0 1 2 3 4 5 10 12.50 15 17.50 20 22.50 ];
11 fig = figure('Units', 'Normalized', 'OuterPosition', [0, 0.04, 1, 0.96]),
12 for i = 1:numel(Fx)
13 hl = exp(-t1.^2/(2*sgm3^2)); % Sistemin birim impuls cevabi (Gauss isareti)

```



```
14 c = cos(2*pi*Fx(i)*t1); % Merkez frekansi Fx(i)'ye getirmek için kullanılacak
15 h = hl.*c;
16 %Not: mag_Y = mag_Y/max(mag_Y) islemi teorik olarak uygun degildir. Sadece
17 %gorsellestirmede yararli oldugu için kullanilmistir !!!!

19 mag_Y = fftshift(abs(fft(y)));          mag_Y = mag_Y/max(mag_Y);
20 mag_H = fftshift(abs(fft(h,numel(y))))); mag_H = mag_H/max(mag_H);
21 F = linspace(-Fs/2,Fs/2,numel(mag_Y));
22 z = conv(y,h,'same');          % filtreleme islemi.
23 mag_Z = mag_H.*mag_Y;    mag_Z = mag_Z/max(mag_Z);

25 clf(fig)
26 subplot(4,2,[1 2]),plot(F,mag_Y,'b'),hold on,plot(F,mag_H,'r'),
27 xlim([-25 25]),ylim([0 1.1]),grid on,ylabel('Genlik [V]')
28 title(['{H(j\Omega): \color[rgb]{1.0 0.0 0.0}KIRMIZI} ',',...
29       '{Y(j\Omega): \color[rgb]{0.0 0.0 1.0}MAVI}'],...
30       'Interpreter','tex','FontSize',15)

32 subplot(4,2,[3 4]),plot(F,mag_Z,'m'),grid on,xlim([-25 25])
33 xlabel('Frekans [Hz]'),ylabel('Genlik [V]')
34 title('$Z(j\Omega) = H(j\Omega) \times Y(j\Omega)$',...
35       'Interpreter','latex','FontSize',15)

37 subplot(4,2,5),plot(t1 , h,'color',[0.36, 0.54, 0.66]),grid on,
38 ylabel('Genlik [V]')
39 title(['$h(t) = e^{-\frac{t^2}{2} \times \sigma^2} \times \cos(2\pi \times F_c \times$
40       '$t)$ ',...
41       '$F_c$ = ',num2str(Fx(i))], 'Interpreter','latex','FontSize',15)

42 subplot(4,2,6),plot(t , y,'m'),grid on , ylabel('Genlik [V]')
43 title(['$y(t) = x(t)+\eta(t)$ ', 'dB: ',num2str(dB)],...
44       'Interpreter','latex','FontSize',15)

46 subplot(4,2,7),plot(t , z,'color',rand(1,3)),grid on
47 xlabel('Zaman [sn]'),ylabel('Genlik [V]')
48 title('$ z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) \times h(t-\tau)$',...
49       'Interpreter','latex','FontSize',15)

51 subplot(4,2,8),plot(t , z,'—k','linewidth',1.5),xlim([0 1]),grid on
52 xlabel('Zaman [Hz]'),ylabel('Genlik [V]')
53 title('1 sn icindeki salinim',...
54       'Interpreter','latex','FontSize',15)

56 suptitle('Gurultulu Isaretin Farkli Merkez Frekanslari ile Filtrelenmesi')
57 drawnow
58 pause(5)
59 end
```



Gauss filtresinin merkez frekansı F_x , 0'dan farklı ise **GABOR FİLTRESİ** olarak isimlendirilir. Gabor filtreleri band geçiren filtrelerdir. Bu uygulamada tasarlanan Gabor filtresinin band genişliği dar olduğu için $x(t)$ içindeki sinüsoidal bileşenleri oldukça etkili bir şekilde filtreleyebilmektedir.

6 Otokorelasyon ve Fourier Dönüşümü

İşaretlerin otokorelasyonunun FD'si, frekans domeninde güç spektrumunu ifade eder. $x(t)$ zaman serisinin $S_{xx}(f)$ güç spektrumu, gücün bu sinyali oluşturan frekans bileşenlerine dağılımını tanımlar. Fourier analizine göre, herhangi bir fiziksel sinyal, bir dizi ayrık frekansa veya kesintisiz bir aralıktaki bir frekans spektrumuna ayrıştırılabilir. Belirli bir sinyalin (gürültü dahil) frekans içeriği bakımından analiz edilmesinin istatistiksel ortalaması, spektrum olarak adlandırılır.

```

1 clear all, close all; clc
2 Fs = 100; % Surekli zaman icin orneklem frekansi
3 Ts = 1/Fs; % Surekli zaman vektoru icin Delta_T

5 t = -1:Ts:1; % [-20 , 20] arasi bir zaman dilimi

7 % cos square sawtooth
8 F0 = 5;
9 x = sawtooth(2*pi*F0*t);
10 y = xcorr(x);

```

```
12 figure,
13 subplot(211),plot(t,x,'b','linewidth',2),grid on
14 xlabel('Zaman [Hz]'),ylabel('Genlik [V]')
15 title('Temel isaret: x(t)')

17 subplot(212),plot(y,'r','linewidth',1),grid on
18 xlabel('Zaman [Hz]'),ylabel('Genlik [V]')
19 title('x(t) ifadesinin otokorelasyonu')

21 X = fftshift(abs(fft(x)));
22 Y = fftshift(abs(fft(y)));

24 Fa = linspace(-Fs/2,Fs/2,numel(X));
25 Fb = linspace(-Fs/2,Fs/2,numel(Y));

27 figure,
28 plot(Fa,X.^2,'—b','linewidth',2),hold on,plot(Fb,Y,'r'),
29 xlabel('Frekans [Hz]'),ylabel('Genlik [V]'),grid on
30 title('Guc Spektrumu ile Otokorelasyon FD nin Karsilastirilmesi')
```

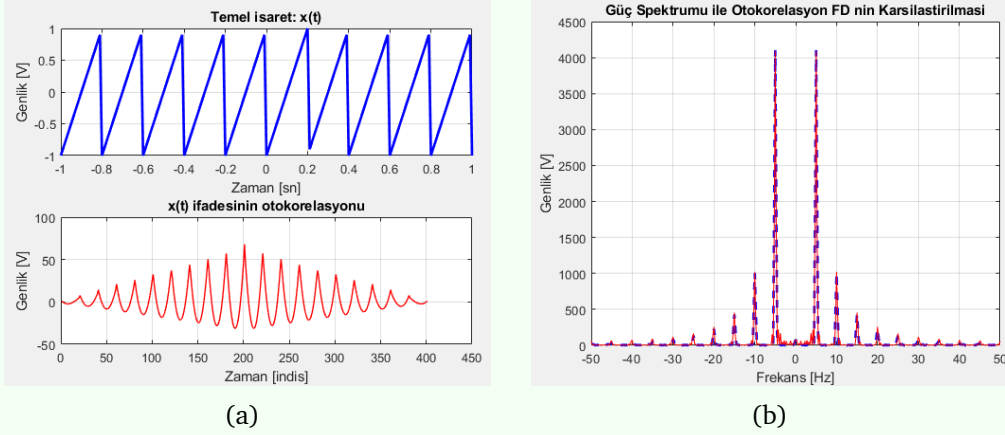
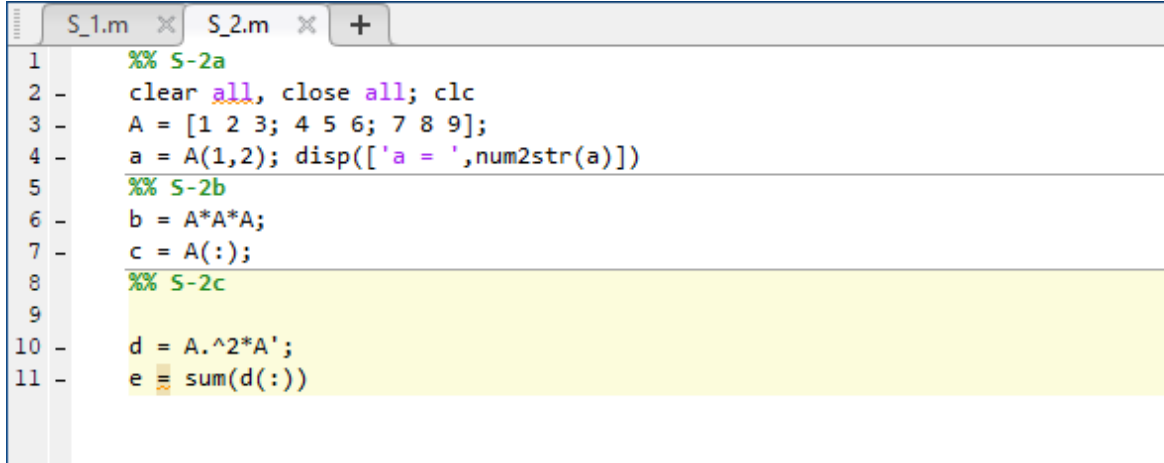


Figure 13: (a) Üçgen dalganın kendisi ve otokorelasyon dizisi (b) Güç Spektrumu (Mavi), Otokorelasyonun FD'si (Kırmızı)

7 Deneysel Yapılacaklar

Deneysel kapsamında 3 soru bulunmaktadır. Her soru için mutlaka Şekil (14)'de gösterildiği gibi yeni sekme açılmalı ve **S_1** olarak isimlendirilmelidir. Sorular altında bulunan alt başlıklar için sekme sayfası %% ile bölümlere ayrılmalıdır ve **S_1a** olarak isimlendirilmelidir. **CTRL + ENTER** ile her bir bölüm bağımsız olarak çalıştırılabilir. **Soru altındaki şıkların cevabı kısa olsa bile mutlaka %% ile her şıkkı bölmeyi unutmayınız.**



```
1 %% S-2a
2 - clear all, close all; clc
3 - A = [1 2 3; 4 5 6; 7 8 9];
4 - a = A(1,2); disp(['a = ', num2str(a)])
5 %% S-2b
6 - b = A*A*A;
7 - c = A(:);
8 %% S-2c
9
10 - d = A.^2*A';
11 - e = sum(d(:))
```

Figure 14: Örnek çözüm sistematığı

7.1 İşaretlerin Frekans Analizi ve Yorumlanması (30 pt)

S1: Gauss fonksiyonu haberleşme, olasılık teorisi ve makine öğrenmesi gibi konularda yoğun olarak kullanılmaktadır. Ayrıca Gauss fonksiyonunun türeviden önemli bir işaret olup bir çok alanda kayda değer bir yeri vardır. Bu çalışmada Gauss işaretinin türevi üzerinden FD analizi yapılacaktır. **Önemli:** Deneysel esnasında her grup için farklı fonksiyon sorulacaktır.

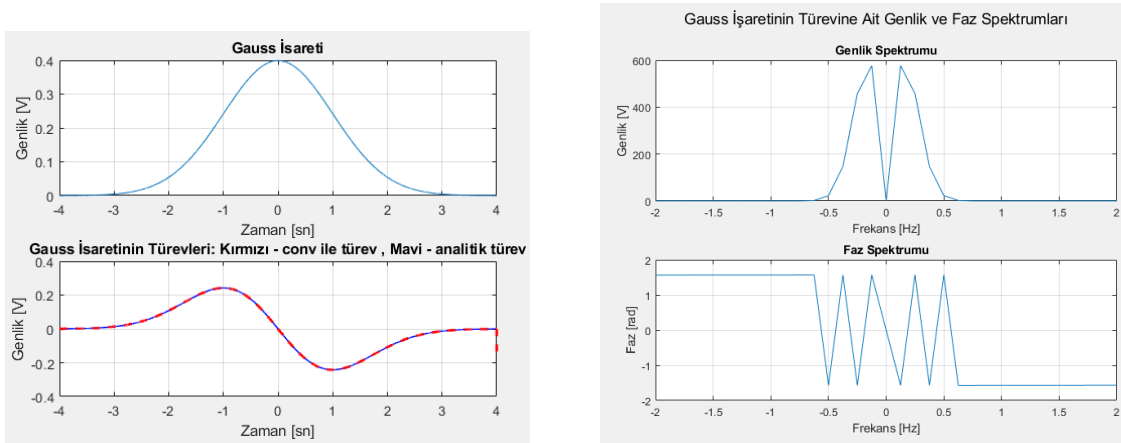
1a: $\sigma = 1$, $F_s = 1e3$ ve $t \in [-\alpha, \alpha]$ parametreleri ile $g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \times e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$ Gauss fonksiyonunu **handle** fonksiyonu olarak yazınız. t 'nin sınırları için verilen α değerini σ üzerinden fonksiyonun sıfır olduğu kabul edilen kıstas üzerinden belirleyiniz. (6pt)

1b: $g'(t) = -\frac{t}{\sigma^3 \times \sqrt{2\pi}} \times e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$ Gauss fonksiyonunun türev ifadesidir. $g'(t)$ ifadesini **handle** fonksiyon olarak yazınız. **Dikkat:** t ifadesi vektör olduğu için fonksiyonların matematiksel işlemlerinde ./, .* olarak yazmayı unutmayınız. (6pt)

1c: 1a'da Gauss fonksiyonu için yazdığınız handle fonksiyonunu kullanarak $x = g(t)$ üretiniz. conv ile yapılan türev alma metodu ile x 'in türevini alınız ve 1b'de yazdığınız $y = g'(t)$ handle fonksiyonu ile Şekil 15(a)'teki gibi sonucu karşılaştırınız. **Grafiğinizin Şekil 15(a)'e olan benzerliği önemlidir.** (6pt)

1d: 1c'de elde ettiğiniz türev ifadesinin (handle veya analitik farketmez) FD'sini alınız. Genlik ve faz spektrumlarını **eksen düzenli** bir şekilde çizdiriniz. Grafik çizimleri için **x ekseninde skalayı**, `xlim([-2 2])` olarak seçiniz. **NOT:** Grafiğinizin Şekil 15(b)'e olan benzerliği önemlidir. `title`, `xlabel`, `ylabel` ayrıntılarına dikkat ediniz. (6 pt)

1e: Her grup için ayrı yorum sorusu. (6pt)



(a) Gauss işareti ve türevi

(b) Gauss türevinin FD analizi

Figure 15: S1 için cevap grafikleri

7.2 FD Analizinde Gürültünün Etkisi (30 pt)

S2: İki farklı alıcı için gönderilen mesaj işaretinin matematiksel formu $x(t) = 20 \times \cos(2\pi \times 10 \times t) + 10 \times \sin(2\pi \times 20 \times t)$ olarak verilmektedir. Verici tarafından yayılan işaretin alıcı tarafında 0dB SNR ile alındığı bilindiğine göre;

2a: $x(t)$ işaretini $F_s = 100$ ve $t \in [-2, 2]$ parametrelerini kullanarak oluşturunuz. $y(t) = x(t) + \eta(t)$ gürültülü işaretini **awgn** kullanarak türetiniz ve $x(t)$ ve $y(t)$ işaretlerini **subplot** ile çizdiriniz. (10pt)

2b: $x(t)$ ve $y(t)$ işaretlerinin FD analizinde genlik spektrumlarını hesaplayınız. Karşılaştırmak için **subplot** ile eksen düzenli olarak çiziniz. 2a ve 2b grafiklerini gürültü-ışaret arasındaki ilişki temelinde yorumlayınız. (10pt)

2c: $h(t) = e^{-\frac{t^2}{2 \times \sigma^2}}$, $\sigma = 0.25$ işaretini üretiniz. $z(t) = h(t) \times y(t)$ çarpma işlemi yapınız ve $y(t)$ ile $z(t)$ işaretlerinin genlik spektrumlarını **subplot** ile karşılaştırınız. Grafiklerdeki değişimi yorumlayınız. **İpucu:** Zamanda çarpma frekansta konvolüsyon. (10pt)

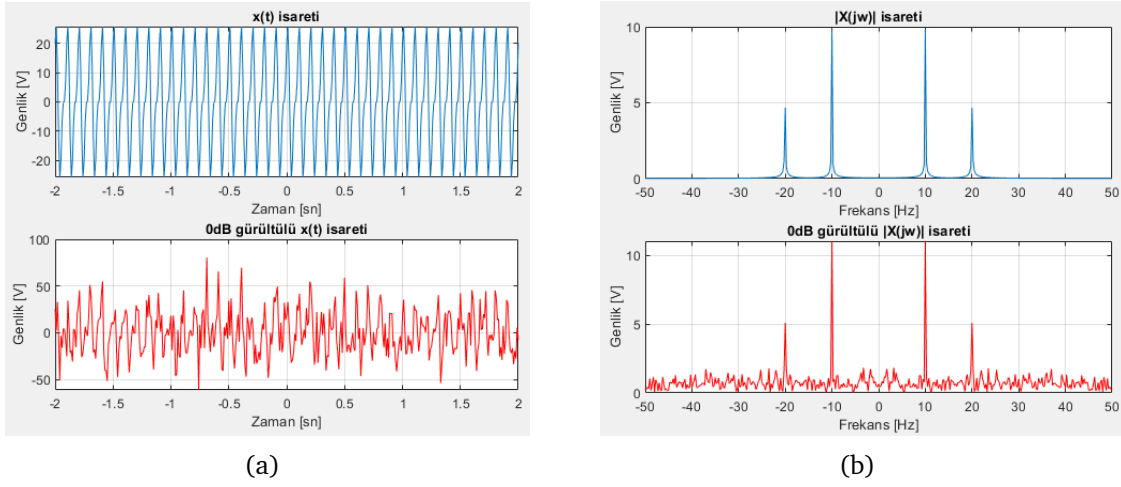


Figure 16: 2a ve 2b için cevap grafikleri

7.3 Filtreleme (40 pt)

S3: Şekil (17)'de verilen $x_1(t)$: kare dalga (square), $x_2(t)$: üçgen dalga (sawtooth) ve $x_3(t)$: cos işaretlerinin grafikten okunarak üretilmesi üzerinedir. İşaretleri üretmek için $F_s = 5000$ ve $t \in [-2, 2]$ değerlerini kullanınız.

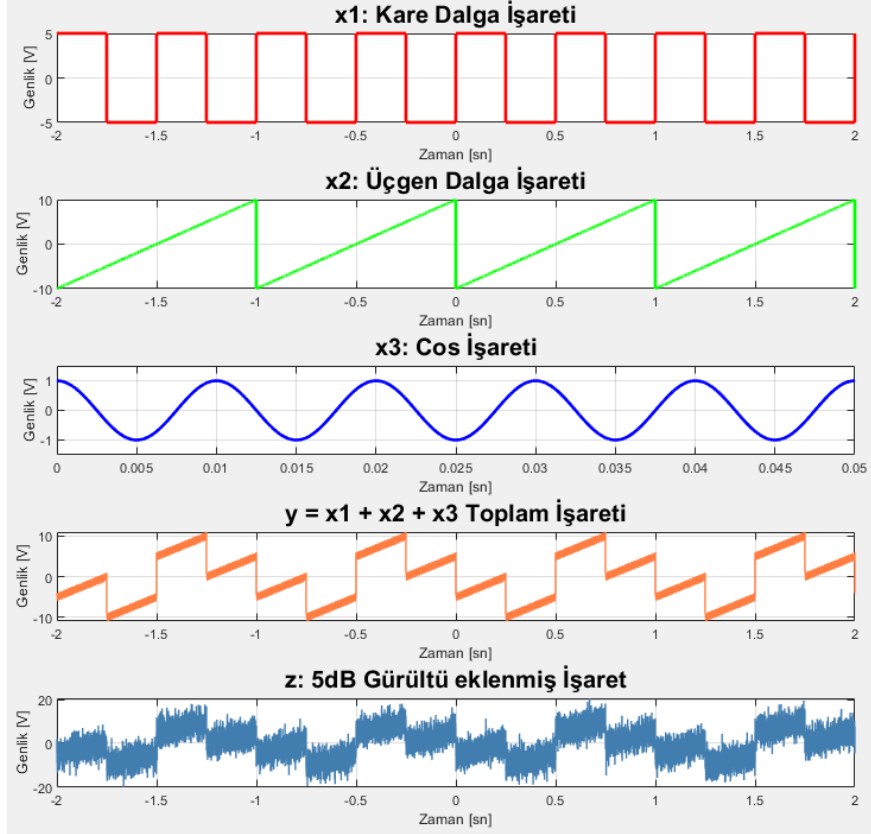


Figure 17: Gerçekleşmesi yapılacak işaretler

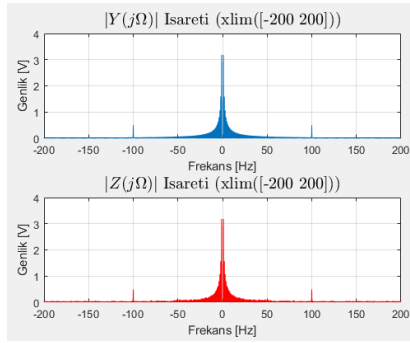
3a: $x_1(t)$, $x_2(t)$ ve $x_3(t)$ işaretlerini ayrı ayrı oluşturunuz. $y(t)$ ve $z(t)$ işaretlerini elde ediniz ve Şekil (17)'daki grafiğin **aynısını** (renkler ve font büyüklükleri farklı olabilir.) çizdiriniz. $x_3(t)$ için **xlim([])** kullanınız. (8pt)

3b: $y(t)$ ve $z(t)$ işaretlerinin FD'sini alarak genlik spektrumunu **subplot** ile çizdiriniz. Eksenlere uygun etiketleri yazınız. (8pt)

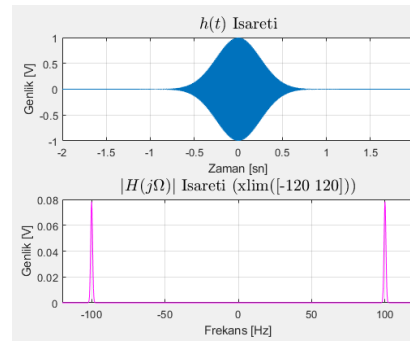
3c: Birim impuls cevabı $h(t) = e^{-\frac{t^2}{2 \times \sigma^2}} \times \cos(2\pi \times F_0 \times t) \implies F_0 \sim x_3(t)$ ve $\sigma = 0.25$ filtresini üretiniz. Genlik spektrumunu hesaplayınız. $h(t)$ ve $|H(j\Omega)|$ işaretlerini subplot ile çiziniz. (10pt)

3d: $h(t)$ ve $y(t)$ işaretlerinin konvolüsyonunu 'same' modunda alınız. Elde ettiğiniz işaret $g(t)$ olsun. (1) $g(t)$ işaretinin zamandaki hali, (2) $z(t)$ işaretinin genlik spektrumu ve (3) $g(t)$ işaretinin genlik spektrumunu subplot ile çiziniz. Etiketlerin ve başlığın font stilleri önemli değildir. (10pt)

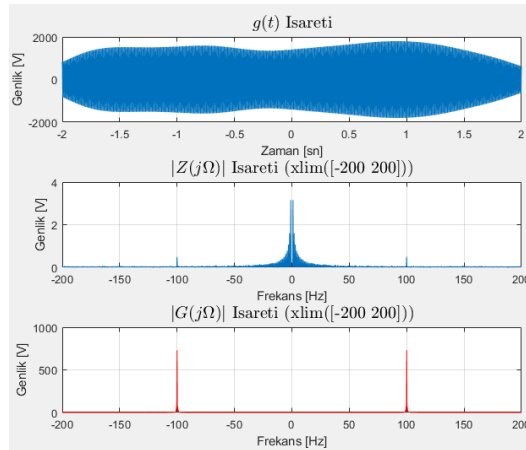
3e: Yorum sorusu. (4pt)



(a) 3b



(b) 3c



(c) 3d

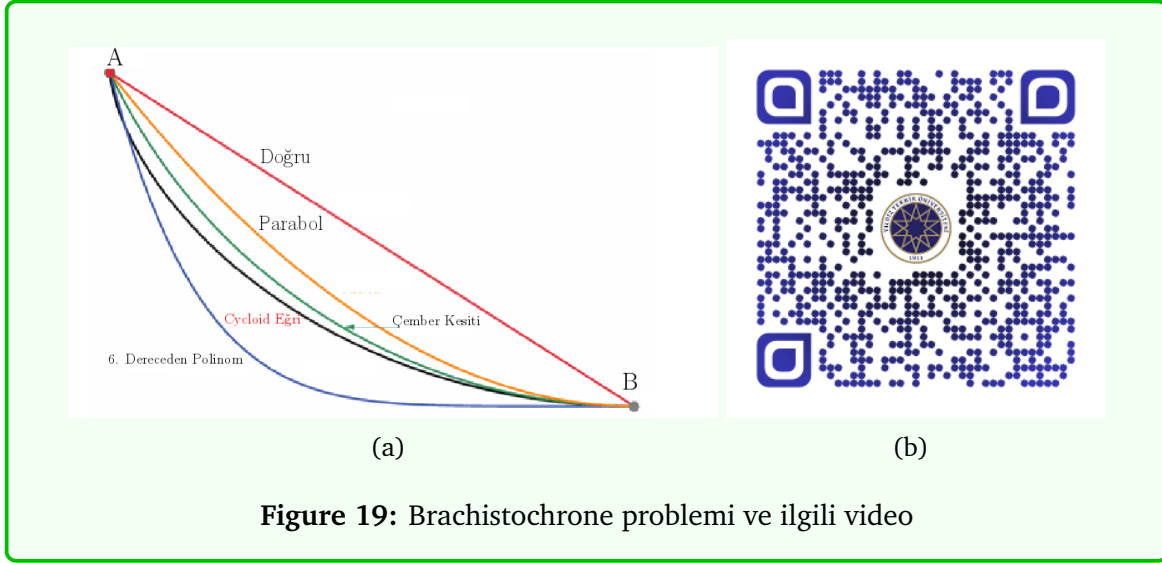
Figure 18: 3. soruya ait cevap grafikleri

DENEY SONU .:

8 İsteğe Bağlı Araştırma Konuları

8.1 Brachistochrone Problemi

1696'da Johann Bernoulli tarafından *Acta Eruditorum*'da ortaya atılan problem Şekil (19) gösterilen A ve B noktalarını birbirine bağlayan yollar arasında en kısa zamanda varılabilecek yolun hangisi olduğuna ilişkin bir problemdir. Sezgisel olarak "en kısa yol en hızlı olandır." gibi gelse de sonuç sezgilerimizden çok farklıdır.



Kaynak

(resim): www.maa.org/press/periodicals/convergence/
(metin): history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Brachistochrone

8.2 Ayrık Kosinüs Dönüşümü (DCT)

FD'nin uygulama alanları arasında bulunan veri sıkıştırma, haberleşme sistemleri, depolama ve büyük veri analitiği gibi konular için hayati öneme sahiptir. Veri sıkıştırma **kayıplı** ve **kayıpsız** olmak üzere iki başlık altında incelenir. Kayıplı veri sıkıştırma algoritmalarından biri olan JPEG (Joint Photographic Experts Group), Ayrık Kosinüs Dönüşümü (*Discrete Cosine Transform*, (DCT)) tabanlı bir yapıya sahiptir. DCT, FD'nin reel dönüşüm türevlerinden biridir. Veriyi kompleks fonksiyonlar tabanında açmak yerine reel bir dönüşüm sistematığı sunan DCT sayesinde yüksek boyutlardaki görüntüler $\times 20$ veya $\times 50$ kata kadar gözün algılayamayacağı kayıplar ile sıkıştırma yapabilmektedir.

Kaynak

www.mathworks.com/help/images/discrete-cosine-transform.html

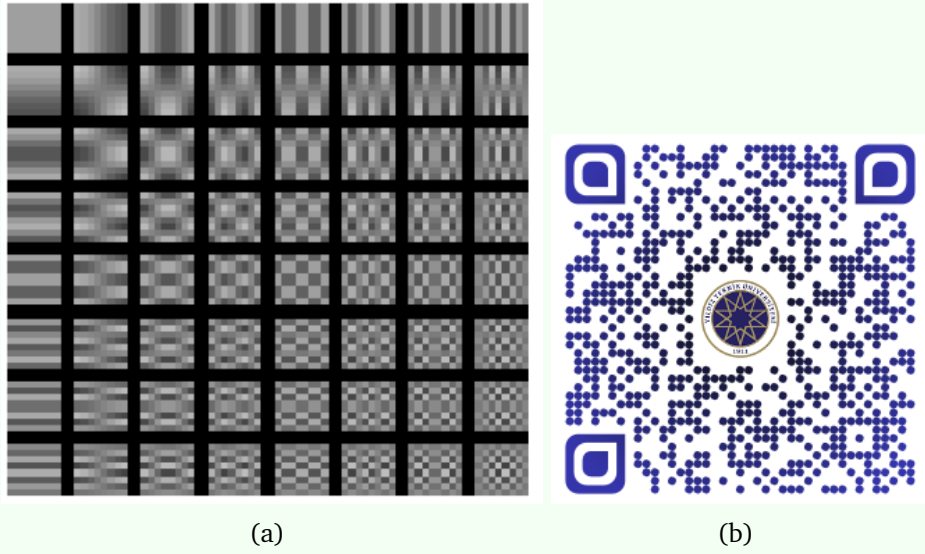


Figure 20: DCT'nin görüntü sıkıştırma için kullanılan taban fonksiyonları ve ilgili video

8.3 Güzel Bir İntegral

$x \in [0, 1]$ arasında $f(x) = x^{-x}$ fonksiyonunun integrali, $k \in [1, 2, 3, \dots, \infty]$ olan tam sayıların $g(k) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-k}$ toplamına eşittir.. $\square \square$

$$\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-k} \quad (4)$$

```
1 clear all, close all; clc
2
3 f = @(x) (x.^(-x));
4
5 int_f = integral(f,0,1);
6
7 sum_g = 0;
8 N_inf = 20;
9 for k = 1:N_inf
10     sum_g = sum_g + k^(-k);
11 end
12
13 sprintf('İntegral sonucu: %.10f || Toplam sonucu: %.10f ',int_f,sum_g)
```

Command Window

ans =

'İntegral sonucu: 1.2912859971 || Toplam sonucu:1.2912859971 '