

ANLAMLI RAKAMLAR

Bazı fiziksel büyüklükler ölçüldüğünde, ölçülen değerler, sadece deneysel belirsizliklerin sınırları içinde bilinir. Belirsizliğin değeri ölçümde kullanılan aletlerin kalitesi, deneycinin yeteneği ve yapılan ölçümlerin sayısı gibi değişik etmenlere bağlı olabilir.

Kurallar

- 1) 1, 2, 3, ... ,9'a kadar olan rakamlar anlamlıdır.
- 2) Ondalık ayıraçtan sonra sayının sonundaki sıfırlar anlamlıdır.
- 3) İki anlamlı rakam arasında kalan sıfırlar da anlamlıdır.

Ölçülen Değer	Anlamlı rakam sayısı	Ölçülen Değer	Anlamlı rakam sayısı	Ölçülen Değer	Anlamlı rakam sayısı
6,751 g	4	0,0230 cc	3	0,001008	4
0,157 ml	3	404	3	0,00010700	5
28,0 ml	3	70080	4	0,05070080	7
2500 m	2	8000	1	$2,53 \times 10^4$	3
0,070 g	2	800	1	$3,06 \times 10^{-5}$	3
30,07 kg	4	800,	3	$1,000 \times 10^8$	4
0,106 cm	3	50060,	5	$4,20 \times 10^{-7}$	3
0,0067 g	2	50060,00	7		

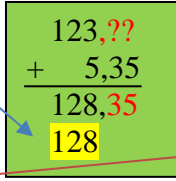
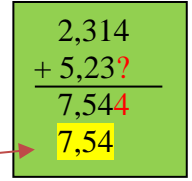
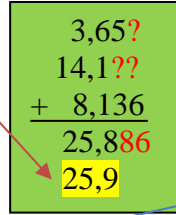
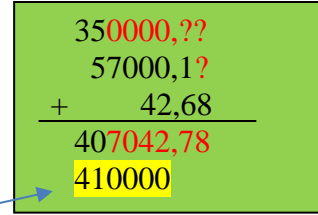

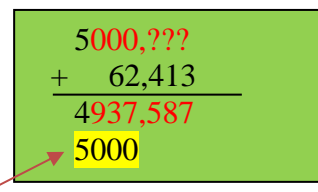
Sayıları Yuvarlama

Ölçülen D	ARS	Yuvarlama	Ölçülen D	ARS	Yuvarlama	Ölçülen D	ARS	Yuvarlama
4257,16	1	4000	158,1054	1	200	0,035047	1	0,04
4257,16	2	4300	158,1054	2	160	0,035047	2	0,035
4257,16	3	4260	158,1054	3	158	0,035047	3	0,0350
4257,16	4	4257	158,1054	4	158,1	0,035047	4	0,03505
4257,16	5	4257,2	158,1054	5	158,11	0,035047	5	0,035047
4257,16	6	4257,16	158,1054	6	158,105	0,035047	6	0,0350470

Sayı	ARS	Yuvarlama	Sayı	ARS	Yuvarlama
50000	1	5×10^4	36500000	1	40000000
50000	2	$5,0 \times 10^4$	36500000	2	37000000
50000	3	$5,00 \times 10^4$	36500000	3	36500000
50000	4	$5,000 \times 10^4$	36500000	4	$3,650 \times 10^7$
50000	5	$5,0000 \times 10^4$	36500000	5	$3,6500 \times 10^7$

Toplama Kuralı

Sayılar toplanırken sonuçtaki ondalık basamak sayısı, toplamdaki herhangi bir terimin en az ondalık basamak sayısına eşittir. Bu kural çıkarma için de geçerlidir.

$123+5,35=128,35$	\cong	128		
$1,0001+0,0003$	$=$	1,0004		
$1,002-0,998$	$=$	0,004		
$2,314+5,23=7,544$	\cong	7,54		
$3,45+5,3=8,75$	\cong	8,8		
$3,65+14,1+8,136=25,886$	\cong	25,9		
$530, +4,63=534,63$	\cong	535,		
$36500+143,56=36643,56$	\cong	36600		
$350000+57000,1+42,68=407042,78$	\cong	410000		
$72000+4300+160000$	$=$	240000		
$(4,671) - (2,1) =2,571$	\cong	2,6		
$(7,463) - (3,58) =3,883$	\cong	3,88		
$(200) - (28,14) =171,86$	\cong	2×10^2		
$(5000) - (62,413) = 4937,587$	\cong	5000	$=$	5×10^3

Çarpma Kuralı

İki sayı çarpıldığında sonuçtaki anlamlı rakam sayısı, çarpımdaki en az anlamlı rakam sayısına eşittir. Bu kural bölme içinde geçerlidir.

$(9,6) \times (7)$	$=$	67,2	\cong	70	$=$	7×10^1
(2)	(1)			(1)		(1)
$(4,38) \times (2,3)$	$=$	10,074	\cong	10,	$=$	$1,0 \times 10^1$
(3)	(2)			(2)		(2)
$(8,315) \times (17,368)$	$=$	144,41492	\cong	144,4		
(4)	(5)			(4)		
$(34,7) \div (3,1)$	$=$	11,193548	\cong	11		
(3)	(2)			(2)		
$(536,3172) \div (13,2)$	$=$	40,63009091	\cong	40,6		
(7)	(3)			(3)		
$(325) \div (75)$	$=$	4,33333333	\cong	4,3		
(3)	(2)			(2)		

$$(4000) \div (8,17) = 489,596083231334 \cong 500$$

(1) (3) (1)

$$(4,231 \times 10^{-5} + 7,6 \times 10^{-6} + 2,731 \times 10^{-4}) = (0,4231 \times 10^{-4} + 0,076 \times 10^{-4} + 2,731 \times 10^{-4})$$
$$= (3,2301 \times 10^{-4}) = (3,230 \times 10^{-4})$$

Karışık İşlemler

$$(4,3) \times (5,23) + 6,814 = 22,489 + 6,814 = 29,303 \cong 29$$

(2) (3) (2)

$$(7,35) \times (4,265) + 7,34 = 31,34775 + 7,34 = 38,68775 \cong 38,7$$

(3) (4) (3)

$$\frac{8,46 - 5,312}{2,8} = \frac{3,148}{2,8} = 1,124285714 \cong 1,1$$

(14 insan) x (25,9 mil) = 362,6 \cong 363 sayılabilir olan niceliklerde anlam aranmaz.
(Sayılabilir)

$$(34) \times (3 \text{ elma}) = 102$$

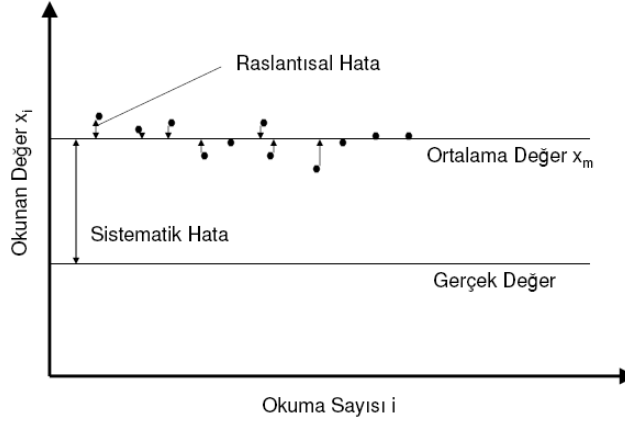
(Sayılabilir) (Sayılabilir)

ÖLÇÜMDE HATA

Belirsizlik, esas olarak hiçbir ölçüm cihazının sonsuz derecede hassas (duyarlı) veya sonsuz derecede doğru olmamasından kaynaklanır. Ölçümde belirsizlik (hata) kaçınılmazdır. Bir “**M**” niceliğinin ölçümündeki belirsizlik ΔM ise bu ölçüm (**M** \pm ΔM) şeklinde yazılır. Hata kaynakları aşağıdaki gibidir,

- 1) **Ölçme İşlemini Yapan kişiden Kaynaklanan Hata** (Dikkatsizlik, yorgunluk, heyecan, eğitimsizlik vb,)
- 2) **Ölçme Aracından Kaynaklanan Hata** (Hassasiyet, doğru ölçüm cihazı seçememe vb,)
- 3) **Ölçme İşlemi Yapılacağı Ortamdan Kaynaklanan Hata** (Ortamın yeterince temiz olmaması, yeterince ışıklandırılmaması, sıcaklığının uygun olmaması vb,)
- 4) **Ölçülen cisimden kaynaklanan Hata** (Ölçülen iş parçasının fiziksel özellikleri)

DENEYSEL BULGULARIN ANALİZİ (HATA ANALİZİ)



Aritmetik Ortalama: Aynı bir fiziksel büyüklük için yapılan n adet “ x_i ” ölçümünün **aritmetik ortalaması** (x_m) aşağıdaki gibi verilir.

$$x_m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Sapma: Her bir ölçüm değerinin ortalama değerden farkı ise, “*sapma*” (*deflection, deviation*) olarak tanımlanır ve $d_i = x_i - x_m$ şeklindedir. Yani;

$$d_1 = x_1 - x_m; \quad d_2 = x_2 - x_m; \quad d_3 = x_3 - x_m; \quad \dots; \quad d_n = x_n - x_m$$

$$\text{Ortalama sapma} = \Delta d = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\Delta d_i|$$

Örnek: Bir kütlenin belirli bir yükseklikten düşüş zamanını 12,24 s, 12,32 s, 12,25 s, 12,11s dört kez ölçüldüğünü düşünün. Zamanın ortalama değerini ve ortalama sapmasını bulunuz.

Çözüm:

$$\text{Zaman Ortalaması} = t_m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{4} (12,24 + 12,32 + 12,25 + 12,11) = 12,23 \text{ s}$$

$$\text{Ortalama Sapma} = \Delta t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\Delta t_i| = \frac{1}{4} (0,01 + 0,19 + 0,02 + 0,12) = 0,06 \text{ s}$$

$$\text{Zaman} = (12,23 \pm 0,06) \text{ s}$$

Ölçüm (s)	Ortalama (s)	$d_i = (x_i - x_m)$	$ d_i $	$(x_i - x_m)^2$
12,24	12,23	0,01	0,01	0,36
12,32		0,09	0,09	1,69
12,25		0,02	0,02	2,89
12,11		- 0,12	0,12	1,96

ÖLÇÜMDE BELİRSİZLİK

- Ölçümde belirsizlik (hata) kaçınılmazdır.
- “M” Ölçümdeki belirsizlik “ $\pm \Delta M$ ” sembolüne ile gösterilir.
- Belirsizlik “mutlak belirsizlik veya kesirli belirsizlik” olarak ifade edilir.
- **Mutlak Belirsizlik:** Ölçülen nicelikle aynı birim kullanır. Örneğin $(21,3 \pm 0,2)$ cm
- **Kesirli Belirsizlik:** Ölçülen miktarın bir kesri veya yüzdesi olarak ifade edilir.

$$0,2 \text{ cm} / 21,3 \text{ cm} = 0,009 = \% 0,9 \rightarrow (21,3 \text{ cm} \pm \% 0,9)$$

- Herhangi iki nicelik toplanır veya çıkarılırsa, sonucun mutlak belirsizliğini bulmak için mutlak belirsizlikler toplanır.
- Herhangi iki nicelik çarpılırsa (veya bölünürse) sonucun kesirli belirsizliği, çarpıma (veya bölmeye) katılan her bileşenin kesirli belirsizlikleri toplanır.

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta W}{W}$$

Örnek: Dikdörtgen şeklindeki bir plakanın uzunluğu $(21,3 \pm 0,2)$ cm ve eni $(9,8 \pm 0,1)$ cm'dir. Plakanın alanını hesaplayınız.

Çözüm:

$$\text{Alan} = A = L \times W = (21,3 \text{ cm}) \times (9,8 \text{ cm}) = 208,74 \text{ cm}^2 \cong 210 \text{ cm}^2$$

$$\text{Alan} \cong 210 \text{ cm}^2$$

$$\text{Belirsizlik} = \frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta W}{W} = \frac{0,2}{21,3} + \frac{0,1}{9,8} = 0,009389 \dots + 0,010204 \dots = \pm 0,0195937 \dots$$

$$\frac{\Delta A}{A} = \pm 0,0195937 \dots \cong \pm 0,02 \rightarrow \pm (0,02) \times 100 = \pm \%2 \rightarrow \frac{\Delta A}{A} \cong \pm \%2$$

$$\Delta A = \pm (0,0195937 \dots), (A) = \pm (0,0195937 \dots) \times (208,74), = \pm 4,09 \text{ cm}^2 \cong \pm 4 \text{ cm}^2$$

$$\Delta A \cong \pm 4 \text{ cm}^2$$

Standart formda

$$\text{Alan} = (210 \pm 4) \text{ cm}^2 \text{ veya } (210 \text{ cm}^2 \pm \% 2)$$

Örnek: Bir kürenin yarıçapı $(6,50 \pm 0,20)$ cm ve kütlesi de $(1,85 \pm 0,02)$ kg olarak ölçülüyor. Bu kürenin yoğunluğunu anlamlı rakamları dikkate alarak hesaplayınız.

Çözüm:

$$\text{Yarıçap} = (6,50 \pm 0,20) \text{ cm} = (6,50 \pm 0,20) \times 10^{-2} \text{ m}; \quad \text{Kütle} = (1,85 \pm 0,02) \text{ kg}$$

$$\text{Yoğunluk} = \rho = \frac{m}{\left(\frac{4}{3}\right) \pi r^3} = \frac{1,85 \text{ kg}}{\left(\frac{4}{3}\right) \pi (6,50 \times 10^{-2} \text{ m})^3} = 1,608211 \dots \times 10^3 \cong 1,61 \times 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$\text{Yoğunluk} = \rho \cong 1,61 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$$

$$\text{Belirsizlik} = \frac{\Delta \rho}{\rho} = \frac{\Delta m}{m} + 3 \frac{\Delta r}{r} = \frac{0,02}{1,85} + \frac{3(0,20)}{6,50} = 0,010810 \dots + 0,092307 \dots = \pm 0,103118 \dots$$

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} \cong \pm 0,10 \rightarrow \pm (0,10) \times 100 = \pm \%10,$$

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} \cong \pm \%10,$$

$$\Delta \rho = \pm (0,103118 \dots), \rho = \pm (0,103118 \dots) \times (1,608211 \dots \times 10^3)$$

$$\Delta \rho = \pm (0,16583 \dots \times 10^3) \cong 0,17 \times 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$\Delta \rho \cong \pm 0,17 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$$

Standart formda

$$\text{Yoğunluk} = (1,61 \pm 0,17) \times 10^3 \text{ kg/m}^3 \text{ veya } (1,61 \times 10^3 \text{ kg/m}^3 \pm \% 10,)$$

Örnek: Bir dairenin yarıçapı $(10,5 \pm 0,2)$ m olarak ölçülüyor. Bu dairenin a) Alanını ve b) Çevresini hesaplayınız.

Çözüm a) $r = (10,5 \pm 0,2)$ m

$$Alan = \pi r^2 = \pi(10,5)^2 = 346,3605 \dots$$

$$Alan \cong 346 \text{ m}^2$$

$$Belirsizlik = \frac{\Delta A}{A} = 2 \frac{\Delta r}{r} = 2, \frac{(0,2)}{10,5} = 0,038095 \dots$$

$$\frac{\Delta A}{A} \cong \pm 0,04 \rightarrow \pm(0,04) \times 100 = \pm \%4$$

$$\frac{\Delta A}{A} \cong \pm \%4$$

$$\Delta A = \pm (0,038095 \dots), (A) = \pm (0,038095 \dots) \times (346,3605 \dots) = \pm (13,194689 \dots)$$

$$\Delta A \cong \pm 10 \text{ m}^2$$

Standart formda

$$Alan = (346 \pm 10) \text{ m}^2 \text{ veya } (346 \text{ m}^2 \pm \% 4)$$

Çözüm b) $r = (10,5 \pm 0,2)$ m

$$Çevre = 2\pi r = 2\pi(10,5) = 65,97344 \dots$$

$$Çevre \cong 66,0 \text{ m}$$

$$Belirsizlik = \frac{\Delta \zeta}{\zeta} = \frac{\Delta r}{r} = \frac{(0,2)}{10,5} = 0,0190476 \dots$$

$$\frac{\Delta \zeta}{\zeta} \cong \pm 0,02 \rightarrow \pm(0,02) \times 100 = \pm \%2$$

$$\frac{\Delta \zeta}{\zeta} \cong \pm \% 2$$

$$\Delta \zeta = \pm (0,0190476 \dots), (\zeta) = \pm (0,0190476 \dots) \times (65,97344 \dots) = \pm (1,25663 \dots)$$

$$\Delta \zeta \cong \pm 1 \text{ m}$$

Standart formda

$$Çevre = (66,0 \pm 1) \text{ m veya } (66,0 \text{ m} \pm \% 2)$$

2, Çözüm b)

$$Çevre = 2\pi r = 2\pi(10,5 \pm 0,2) = 65,97344 \dots \pm 1,256637 \dots = (66,0 \pm 1) \text{ m}$$

Standart Sapma

Deneysel bulgular, aritmetik ortalama değerden olan sapmalarının dağılımını gösteren bir büyüklük, “*standart sapma*” veya “*sapmaların karelerinin karekökü*” olan σ aşağıdaki gibidir.

$$\sigma = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - x_m)^2 \right]^{1/2}$$

rnek Standart Sapma

Deneysel araŐtırma yapan araŐtırmacılar her zaman yeteri kadar bulgu toplayamazlar. Deneysel bulguların uygun bir değerlendirmesinin yapılabilmesi için en az 20 adet ölüm sonucunun olması gerekir. Bu durumdan daha az sayıdaki lme halinde *rnek standart sapma* aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\sigma_{\ddot{o}} = \left[\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - x_m)^2 \right]^{1/2}$$

Görüldüęü gibi bu ifadede n yerine n-1 böleni kullanılmaktadır. rnek sayısının artması halinde yukarıdaki σ ve $\sigma_{\ddot{o}}$ değerleri birbirine yaklaŐmaktadır. rnek sayısı sonsuza gitmesi halinde ise bu iki ifade aynı değeri vermektedir.

Örnek: Bir ocaktan çıkan kömür numunelerinde yapılan nem ölçülmesinde aşağıdaki sonuçlar bulunmuştur. Bu değerlere göre aritmetik ortalamayı, sapmaların mutlak ortalamasını, standart sapmayı ve örnek standart sapmayı bulunuz.

Numune	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nem (%)	11,2	9,3	12,3	9,2	11,0	14,1	8,9	9,7	10,3	10,0

Çözüm:

Ölçüm	Nem (%)	$d_i = (x_i - x_m)$	$ d_i $	$(x_i - x_m)^2$
1	11,2	0,6	0,6	0,36
2	9,3	- 1,3	1,3	1,69
3	12,3	1,7	1,7	2,89
4	9,2	- 1,4	1,4	1,96
5	11,0	0,4	0,4	0,16
6	14,1	3,5	3,5	12,25
7	8,9	- 1,7	1,7	2,89
8	9,7	- 0,9	0,9	0,81
9	10,3	- 0,3	0,3	0,09
10	10,0	- 0,6	0,6	0,36
Toplam	106,0	0	12, <u>4</u>	<u>23,46</u>

Aritmetik ortalama;

$$x_m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{10} (106,0) = 10,6$$

Sapmaların mutlak ortalaması,

$$|\bar{d}_i| = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |d_i| = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - x_m| = \frac{1}{10} (12, \underline{4}) = 1,24$$

Standart sapma,

$$\sigma = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - x_m)^2 \right]^{1/2} = \left[\frac{1}{10} (23, \underline{46}) \right]^{1/2} = 1, \underline{5}3166 \dots \cong 1,5$$

Örnek standart sapma,

$$\sigma_{\text{ö}} = \left[\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - x_m)^2 \right]^{1/2} = \left[\frac{1}{9} (23, \underline{46}) \right]^{1/2} = 1, \underline{6}1451 \dots \cong 1,6$$